

Современный
Гуманитарный
Университет

Дистанционное образование

0622.01.02; 1

Рабочий учебник

Фамилия, имя, отчество _____

Факультет _____

Номер контракта _____

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

ЮНИТА 1

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И
МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Москва 2000

Рекомендовано Министерством общего и профессионального образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений

КУРС: МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Юнита 1. Вариационное исчисление и методы оптимального управления.
Юнита 2. Прямые методы отыскания экстремума и основы математического программирования.

ЮНИТА 1

Рассмотрены вопросы оптимизации процессов управления и проектирования систем – технических и экономических. В данной юните рассматриваются основы методов оптимизации, которые связаны с классическим вариационным исчислением: уравнения Эйлера и Лагранжа, принцип максимума Понтрягина, динамическое программирование. По основным методам приведены примеры решения задач. Приводятся сведения об основных критериях оптимизации и об одном из подходов к классификации методов оптимизации.

Для студентов Современного Гуманитарного Университета

Юнита соответствует профессиональной образовательной программе № 2

ОГЛАВЛЕНИЕ

	стр.
ДИДАКТИЧЕСКИЙ ПЛАН	4
ЛИТЕРАТУРА	5
ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ	6
ТЕМАТИЧЕСКИЙ ОБЗОР	7
1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИИ	7
1.1. Оптимизация в задачах управления и проектирования	7
1.2. Классические основы оптимизации	9
1.3. Критерии оптимизации	14
1.4. Классификация методов оптимизации	22
1.5. Системный анализ и оптимизация	25
2. КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ, ОСНОВЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ	28
2.1. Основные понятия, используемые в классических методах	28
2.2. Уравнение Эйлера	29
2.3. Условие Лежандра	33
2.4. Некоторые вариационные задачи	34
2.5. Обобщенная задача Лагранжа и задача с ограничениями в вариационном исчислении	39
2.6. Каноническая форма уравнений Эйлера и прямые методы в вариационном исчислении	43
3. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И ПРИНЦИП МАКСИМУМА	46
3.1. Развитие теории управления	46
3.2. Принцип максимума Понтрягина для задач с непрерывным временем	50
3.3. Динамическое программирование и принцип оптимальности	53
3.4. Оптимизация дискретных процессов управления	60
3.5. Методы решения некоторых дискретных оптимизационных задач	61
3.5.1. Задача о кратчайшем пути	61
3.5.2. Задача о критическом пути	63
3.5.3. Задача распределения ресурсов	66
3.5.4. Транспортная задача	69
3.5.5. Алгоритм и блок-схема вычислительного процесса для динамического программирования	75
3.5.6. Задачи планирования	77
3.6. Формальный математический аппарат и эффективность 78 динамического программирования	78
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ	83
ТРЕНИНГ УМЕНИЙ	86
ГЛОССАРИЙ*	

* Глоссарий расположен в середине учебного пособия и предназначен для самостоятельного заучивания новых понятий.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Критерии оптимизации. Классификация методов оптимизации. Системный подход к оптимизации. Основы вариационного исчисления. Классические методы оптимизации. Уравнение Эйлера. Условие Лежандра. Обобщенная задача Лагранжа. Задача с ограничениями в классическом вариационном исчислении. Вырожденные функционалы. Прямые методы в классическом вариационном исчислении. Оптимальное управление и принцип максимума. Непрерывный принцип максимума Понтрягина. Решение задач оптимального быстродействия. Принцип оптимальности. Динамическое программирование. Дискретный принцип максимума Понтрягина. Оптимизация дискретных процессов управления.

ЛИТЕРАТУРА

Базовая

1*. Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации. М., 1975.

2*. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. М., 1965.

Дополнительная

3*. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. М., 1975.

4*. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М., 1985.

5. Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1969.

ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ

№ п/п	Умения	Алгоритмы
1	Нахождение экстремали функционала	1. Определить подинтегральную функцию. 2. Составить уравнение Эйлера. 3. Определить экстремали как решения уравнения Эйлера. 4. Проверить удовлетворение решения начальным условиям.
2	Определение достаточных условий экстремума функционала (условия Лежандра).	1. Составить уравнение Эйлера. 2. Определить экстремали как решения уравнения Эйлера. 3. На основании условий Лежандра определить тип максимума (минимума) данного функционала.
3	Оценка эффективности направленного перебора в динамическом программировании по сравнению с прямым перебором (по задаче распределения ресурсов $\sum_{i=1}^n g_i(x_i) = \max$)	1. Определить количество вычислений для различных комбинаций значений ресурсов при прямом переборе. 2. Определить количество вычислений для различных комбинаций значений ресурсов при направленном переборе (в динамическом программировании). 3. Определить эффективность направленного перебора по сравнению с прямым в %.

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИИ

1.1. Оптимизация в задачах управления и проектирования

Оптимизация – это процесс нахождения наилучшего решения задачи, определяемого по некоторому заранее установленному критерию. Другими словами, это целенаправленная деятельность, заключающаяся в получении наилучших результатов при соответствующих условиях.

Оптимизация в широком смысле слова находит применение в науке, технике и в любой другой области человеческой деятельности, например:

- при проектировании сложных инженерных сооружений и систем;
- в управлении производственными, техническими и экономическими системами;

- в процессах разработки автоматизированных информационных систем и т.д. Так, **оптимальная система управления** может быть реализована в виде набора правил, стратегии или способа управления, согласно которым следует поступать в той или иной ситуации (военной, производственной и т.д.) или в виде комплекса технических средств управления (космическим или морским объектом, инженерным проектом и т.д.).

Поиски оптимальных решений привели к созданию специальных математических методов и уже в XVIII в. были заложены математические основы оптимизации (вариационное исчисление, численные методы и др). Однако до второй половины XX в. методы оптимизации во многих областях науки и техники применялись редко, поскольку практическое использование математических методов оптимизации требовало огромной вычислительной работы, которую без ЭВМ реализовать было крайне трудно, а в ряде случаев - невозможно. Например, большие трудности возникают при решении задач оптимизации процессов в химической технологии из-за большого числа параметров и их сложной взаимосвязи между собой. При наличии ЭВМ задача заметно упрощается.

Постановка задачи оптимизации предполагает существование следующих условий:

- 1) Наличие объекта оптимизации и цели оптимизации. Формулировка каждой задачи оптимизации должна требовать экстремального значения лишь одной величины, т.е. одновременно системе не должно приписываться два и более критериев оптимизации (практически всегда экстремум одного критерия не соответствует экстремуму другого).

Вот типичный пример неправильной постановки задачи оптимизации: "Получить максимальную производительность при минимальной себестоимости". Ошибка заключается в том, что ставится задача поиска оптимума 2-х величин, противоречащих друг другу по своей сути. Правильная постановка задачи могла быть следующей: "Получить максимальную производительность при заданной себестоимости или получить минимальную себестоимость при заданной производительности".

В первом случае критерий оптимизации – производительность, а во втором - себестоимость.

- 2) Наличие ресурсов оптимизации, под которыми понимают возможность выбора значений некоторых параметров оптимизируемого объекта. Объект должен обладать определенными степенями свободы - **управляющими воздействиями**.

* Жирным шрифтом выделены новые понятия, которые необходимо усвоить. Знание этих понятий будет проверяться при тестировании.

3 бон.

3) Возможность количественной оценки оптимизируемой величины, поскольку только в этом случае можно сравнивать эффекты от выбора тех или иных управляющих воздействий.

4) Учет ограничений.

Часто оптимизируемая величина связана с экономичностью работы рассматриваемого объекта. Оптимизируемый вариант работы объекта должен оцениваться **критерием оптимальности**, под которым понимается количественная оценка оптимизируемого качества объекта.

На основании выбранного критерия оптимальности составляется целевая функция, представляющая собой зависимость критерия оптимальности от параметров, влияющих на ее значение. Вид критерия оптимальности или целевой функции определяется конкретной задачей оптимизации.

Таким образом, задача оптимизации сводится к нахождению экстремума целевой функции.

+
3 бон.

Наиболее общей постановкой оптимальной задачи является выражение критерия оптимальности в виде экономической оценки (производительность, себестоимость продукции, прибыль, рентабельность). Иногда, в частных задачах оптимизации, когда объект является частью технологического процесса, не всегда удастся или не всегда целесообразно выделять прямой экономический показатель, который бы полностью характеризовал эффективность работы рассматриваемого объекта. В таких случаях критерием оптимальности может служить технологическая характеристика, косвенно оценивающая экономичность работы агрегата (время контакта, выход продукта, степень превращения, температура).

4 б.

В задачах оптимизации важным моментом является использование системного подхода при постановке задачи. Сущность системного подхода заключается в комплексном, едином рассмотрении всех частей системы и их эффективном сочетании. Так, при космических полетах можно, увеличивая вес корабля, добиться максимальной автономии управления, независимо от Земли. Можно, наоборот, обеспечив хорошую связь с кораблем, больше аппаратуры разместить на Земле, максимально уменьшив вес корабля. Оптимальную границу распределения веса наземной и бортовой аппаратуры должны определить методы оптимизации, исходя из критерия оптимальности и состояния техники, доступной проектировщикам.

5 бон.

Процесс проектирования любой системы включает в себя как правило следующие этапы:

- создание математической модели процесса, которым требуется управлять (объекта управления), и системы управления с обратными связями (контура управления);

- нахождение формального (математического) закона (описания) управления для полученной модели;

- разработка (приобретение) системного программно-технического комплекса управляющей информационно-вычислительной системы и средств связи;

- разработка информационного и программного обеспечения.

6

На каждом из этих этапов возникает проблема формулировки критериев оптимальности и оптимизации. Так, на этапе разработки информационного и программного обеспечения необходимо решать задачи **оптимизации программирования**, т.е. задачу порождения компилятором выходной программы, которая наилучшим способом использует ресурсы ЭВМ. При этом задача разбивается на ряд подзадач, например:

6 б.

- **глобальная оптимизация программирования** - переупорядочивание установленной последовательности выполнения команд с целью исключения избыточных вычислений;

- **регистровая оптимизация программирования** - привязка регистров ЭВМ к переменным и промежуточным результатам, чтобы минимизировать число случаев "холостого" резервирования регистров;

- **локальная оптимизация программирования** - адаптация программы к конкретным особенностям архитектуры ЭВМ.

Хотя системный подход подразумевает общую оптимизацию всех этапов, каждый из них в отдельности может и не быть оптимальным.

Для решения задач оптимизации прежде всего необходимо уметь формулировать критерии оптимальности и владеть методами (процедурами) оптимизации.

1.2. Классические основы оптимизации

Классические основы оптимизации определяются методами исследования функций в математическом анализе

Известно, что функция $f(x)$ имеет локальный минимум в точке x_0 , если существует некоторая положительная величина d , такая, что если $Sx - x_0 \leq d$, то $f(x) \geq f(x_0)$, т. е. если существует окрестность точки x_0 , такая, что для всех значений x в этой окрестности $f(x)$ больше $f(x_0)$. Функция $f(x)$ имеет **глобальный минимум** в точке x^* , если для всех x справедливо неравенство $f(x) \geq f(x^*)$.

На рис. 1а дано графическое представление функции $f(x)$, которая имеет локальный минимум в точке x_0 и глобальный минимум в точке x^* .

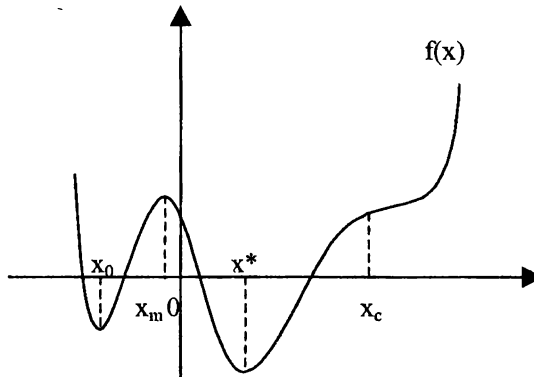


Рис. 1а. Локальный и глобальный минимумы

Классический подход к задаче нахождения значений x_0 и x^* состоит в поиске уравнений, которым они должны удовлетворять. Представленная на рис. 1а функция и ее производные непрерывны, и видно, что в точках x_0 и x^* производная $f'(x)$ (градиент функции) равна нулю. Следовательно, x_0 и x^* будут решениями уравнения:

$$f'(x) = 0.$$

Точка x_m , в которой достигается локальный максимум, и точка x_c , в которой имеется точка горизонтального перегиба функции, также удовлетворяют этому уравнению. Следовательно, уравнение $f'(x) = 0$ является только необходимым

условием минимума, но не является достаточным условием минимума.

Заметим, однако, что в точках x_0 и x^* производная $f'(x)$ меняет знак с отрицательного на положительный. В точке x_m знак меняется с положительного на отрицательный, в то время как в точке x_c он не меняется. Следовательно, производная в минимуме является возрастающей функцией, а поскольку степень возрастания $f'(x)$ измеряется второй производной, можно ожидать, что $f''(x_0) > 0$, $f''(x^*) > 0$, тогда как $f''(x_m) < 0$.

Если, однако, вторая производная равна нулю, ситуация остается неопределенной.

Полученные выше результаты могут найти надежное обоснование, если рассмотреть разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 (или x^* , или x_m), что требует непрерывности функции $f(x)$ и ее производных:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h f'(x_0) + (h^2/2!) f''(x_0) + \dots$$

Если в точке x_0 достигается минимум, то левая часть уравнения будет неотрицательной для любого достаточно малого h . Следовательно, первая производная $f'(x_0)$ должна быть равна нулю. Это является достаточным условием (см. уравнение $f'(x) = 0$). Если бы она была положительной, то достаточно малое отрицательное значение h делало бы правую часть:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h f'(x_0) + (h^2/2!) f''(x_0) + \dots$$

отрицательной, а если бы она была отрицательной, то достаточно малое положительное значение h делало бы правую часть отрицательной.

Так как всегда $h^2 > 0$, то, если $f''(x_0) > 0$, в точке x_0 достигается минимум. Если $f'(x_m) = 0$ и $f''(x_m) < 0$, то из аналогичных соображений в точке x_m достигается максимум. Для определения различия между локальным и глобальным минимумами необходимо сравнить значения функций $f(x_0)$ и $f(x^*)$.

Например, исследуем характер точек перегиба функции:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1,$$

так как $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0$, и $(3x - 1)(x - 1) = 0$, то $x = 1/3$ или $x = 1$.

При $x = 1/3$ производная $f'(x)$ меняет знак с положительного на отрицательный, а при $x = 1$ - с отрицательного на положительный. Следовательно, в точке $x = 1/3$ достигается максимум, а в точке $x = 1$ - минимум.

Этот пример может быть решен более простым способом, если вычислить вторую производную $f''(x) = 6x - 4$:

$f''(1/3) = -2$, т. е. отрицательна, и при $x = 1/3$ достигается максимум;

$f''(1) = 2$, т. е. положительна, и при $x = 1$ достигается минимум.

Неоднозначность, возникающую при $f''(x) = 0$, можно разрешить, увеличив количество членов в формуле разложения в ряд Тейлора:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0) + (h^2/2!) f''(x_0) + (h^3/3!) f'''(x_0) + (h^4/4!) f^{(4)}(x_0) + \dots$$

При этом можно сформулировать следующее правило:

"Если функция $f(x)$ и ее производные непрерывны, то точка x_0 является точкой экстремума (максимума или минимума) тогда и только тогда, когда n четное, где n - порядок первой необращающейся в нуль в точке x_0 производной. Если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то в точке x_0 достигается максимум, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то в точке x_0

достигается минимум".

Например, найдем точку перегиба функции $f(x) = (x - 1)^6$.

$$f'(x) = 6(x-1)^5 = 0 \text{ при } x = 1.$$

Первой необращающейся в нуль в точке $x = 1$ производной будет $f''(1) = 6!$. Следовательно, функция $f(x)$ имеет минимум в точке $x = 1$.

Функцию n действительных переменных можно представить как:

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n).$$

Точка в n -мерном евклидовом пространстве с координатами $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ обозначается вектором-столбцом x . Градиент функции, т. е. вектор с компонентами $\partial f / \partial x_1, \partial f / \partial x_2, \dots, \partial f / \partial x_n$, обозначается $\nabla f(x)$ или, иногда, $g(x)$. Наиболее распространенные задачи оптимизации заключаются в нахождении **минимума (или максимума) функции** или функционала. В первом случае находят значение n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, при которых функция $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ принимает экстремальное значение $F = \min(\max)$.

В простейшем случае дифференцируемости функции и неравенства нулю вторых производных задача сводится к решению n алгебраических (в общем случае нелинейных) уравнений:

$$dF/dx_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1-1)$$

При оптимизации управления приходится оперировать с большим числом переменных. В этом специфика задач оптимизации, и это затрудняет решение уравнений оптимизации даже с помощью ЭВМ.

Если функция $F(x)$, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, помимо переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, зависит еще (параметрически) от другой переменной λ , то решение для каждого значения λ соотношения (1-1) дает оптимальный закон управления:

$$x(\lambda) = \{x_1(\lambda), x_2(\lambda), \dots, x_n(\lambda)\}.$$

Здесь мы уже переходим, по существу, к понятию функционала, частным случаем которого является функция. Методы оптимизации, использующие этот критерий, составляют содержание раздела математики, названного вариационным исчислением. Понятие функционала в математике является дальнейшим обобщением понятия функции. Не очень строго **функционал** можно определить как функцию от функции, т.е. функцию, в которой в качестве независимой переменной выступает другая функция. 116.

Если одному множеству M значений величины x ($x \in M$) соответствует другое множество N значений величины y , то говорят, что y является функцией x , т.е. $y = f(x)$.

Например, пусть $M = \{1, 4, 9, 8\}$ и $N = \{20, 70, 90, 110\}$, и пусть каждому значению x из множества M соответствует одно значение y из множества N . Это - метод задания функции в виде таблиц. Он часто встречается в кибернетике. Аналитически функция может быть задана в виде $y = x^2$, $y = \sin x$.

Если M - множество функций и каждой функции $f(x)$, принадлежащей M ($f(x) \in M$), ставится в соответствие определенное значение величины y из множества N , то говорят, что на множестве M задан функционал.

Например:

$$M \{ \sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x \},$$

$N \{3, 4, 5, 18\}$.

Другим примером функционала может служить определенный интеграл:

$$I = I \{y(x)\} = \int_0^1 y(x) dx.$$

Каждой функции $y(x)$ будет соответствовать числовое значение I . Так, при $y = x$ $I = 1/2$, при $y = x^2$ $I = 1/3$.

Можно поставить задачу отыскания такой функции $y(x)$, которая обращала бы этот функционал в минимум (максимум), т.е.

$$I\{y\} \rightarrow \min(\max).$$

В общем случае подинтегральное выражение в функционале может зависеть явно от аргумента x , y и производной y' :

$$I\{y\} = \int_a^b F(x, y, y') dx. \quad (1-2)$$

Нетрудно показать, что запись (1-2) включает в себя функцию. Так, если положить:

$$F(x, y, y') = f(x) g(t-x),$$

то

$$I = \int_a^b f(x) g(t-x) dx = f(x),$$

при $a < t < b$.

Аналогично, если положить:

$$F(x, y, y') = \sum_{i=1}^n c_i f_i(x) g(t_i - x),$$

то

$$I = \sum_{i=1}^n c_i f_i(t_i).$$

Иногда считают, что функционал является функцией бесконечного числа переменных. Соответственно, **вариационное исчисление** можно рассматривать как обобщение методов отыскания экстремума функции на случай большого или бесконечного числа переменных. Действительно, функцию $y(x)$ в формуле (1-2) можно заменить приближенно ломаной линией (рис. 1) с вершинами $y_0 = y(x_0) = y(a)$, $y_1 = y(x_0 + \Delta x)$, $y_n = y(x_0 + n \Delta x) = y(b)$, а интеграл – суммой:

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} F(x_i, y_i, y_i' - y_{i-1}') / \Delta x \Delta x.$$

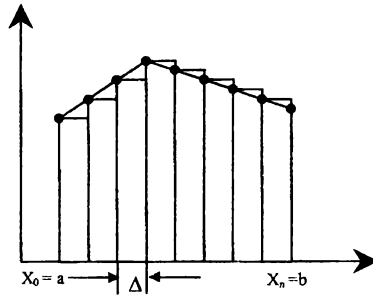


Рис. 1. Замена интеграла на сумму

После этого вариационная задача приближенно решается как обычная задача на отыскивание экстремума функции n переменных:

$$I = (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Такой вывод использовал для своего основного уравнения вариационного исчисления Эйлер.

Однако большинство задач оптимизации содержит ограничения на исходную функцию. Пусть требуется минимизировать функционал:

$$I = \int_a^b F(x, y, y') dx \rightarrow \min;$$

при наличии ограничений

$$\Phi_k(x, y, y') \leq 0;$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, m,$$

где Φ_k - некоторые функции.

Смысл этих соотношений состоит в том, что отыскивается не любая функция $y(x)$, обращающая функционал в минимум, а такая, которая удовлетворяет системе ограничений. Нетрудно убедиться, что тем самым значение **условного экстремума** (экстремум функции при условии, когда на критерий оптимизации наложены ограничения) не может быть меньше значения **абсолютного экстремума** (без ограничений). Аналогичным образом формируется критерий оптимальности (с ограничениями) для функции:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \min;$$

$$\Phi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, m.$$

(1-3)

В классическом вариационном исчислении в функционале интеграл понимается в обычном смысле как предел сумм Дарбу. Далее в целях соблюдения прикладного уровня изложения будет использовано классическое понятие функционала (если не дано специальных оговорок).

Следует заметить, что во всех приведенных формулах переменные x и y могут быть векторами:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n);$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n);$$

$$F = (F_1, F_2, \dots, F_p).$$

Такая форма записи широко используется, и, в частности, она учитывает случаи оптимизации функции многих переменных и оптимизации нескольких функций.

Задачи оптимизации при наличии ограничений, по существу, привели к пересмотру классических методов и созданию новых методов, известных под названием методов программирования. Если в формулах (1-3) все функции линейные, налицо задача линейного программирования. В общем случае эти соотношения определяют задачу нелинейного программирования.

1.3. Критерии оптимизации

Критерий оптимизации - количественный или порядковый показатель, который выражает предельную меру экономического, научно-технического или другого эффекта принимаемого решения для сравнительной оценки возможных решений (альтернатив) и выбора наилучшего.

Вопрос о выборе критерия оптимизации - один из самых важных в процессах оптимизации, в то же время он один из наиболее сложных, и процесс выбора критерия содержит существенную творческую составляющую. Рассмотрим более подробно требования, которые должны предъявляться к критерию оптимизации.

Критерий оптимизации должен:

- выражаться количественно;
- быть единственным;
- отражать наиболее существенные стороны процесса;
- иметь ясный физический смысл и легко рассчитываться.

При постановке конкретных задач оптимизации критерий оптимизации должен быть записан в виде аналитического выражения. В том случае, когда случайные возмущения невелики, а их воздействие на объект можно не учитывать, критерий оптимизации может быть представлен как функция входных, выходных и управляющих параметров:

$$K_{\text{опт.}} = K(X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_n, U_1, U_2, \dots, U_n),$$

Где:

K – критерий оптимизации;

Y – выходные параметры;

X – контролируемые входные параметры;

U – регулируемые, управляющие параметры.

Так как $Y=f(U)$, то при фиксированных X можно записать $K = K(U_{\text{сп.}})$

При этом всякое изменение значений управляющих параметров двояко сказывается на величине K:

- прямо, т.к. управляющие параметры непосредственно входят в выражение критерия оптимизации;
- косвенно - через изменение выходных параметров процесса, которые зависят от управляющих.

Если же случайные возмущения достаточно велики и их необходимо учитывать, то следует применять экспериментально-статистические методы, которые позволят получить модель объекта в виде функции:

$$Y = \varphi(X_p, U),$$

которая справедлива только для изученной локальной области. Тогда критерий оптимальности примет следующий вид:

$$K = K(X_{\text{сп.}}, U_{\text{сп.}}).$$

В принципе, для оптимизации вместо математической модели можно использовать и сам объект, однако оптимизация опытным путем имеет ряд следующих недостатков:

- необходим реальный объект;
- необходимо изменить технологический режим в значительных пределах, что не всегда возможно;
- длительность испытаний и сложность обработки данных.

Наличие математической модели (при условии, что она достаточно надежно описывает процесс) позволяет значительно проще решить задачу оптимизации аналитическим либо численным методами.

Критерии оптимизации могут классифицироваться разными способами, в зависимости от конкретных задач.

Так, иногда различают простые и сложные критерии оптимизации. Критерий оптимизации называется простым, если требуется определить экстремум целевой функции без задания условий на какие-либо другие величины. Такие критерии обычно используются при решении частных задач оптимизации (например, определение максимальной концентрации целевого продукта, оптимального времени пребывания реакционной смеси в аппарате и т.п.).

Критерий оптимизации называется сложным, если необходимо установить экстремум целевой функции при некоторых условиях, которые накладывают ограничения на ряд других величин (например, определение максимальной производительности при заданной себестоимости, определение оптимальной температуры при ограничениях по термостойкости). Как правило, процедура решения задачи оптимизации обязательно включает, помимо выбора управляющих параметров, еще и установление ограничений на эти параметры. Ограничения могут накладываться как по технологическим, так и по экономическим соображениям.

В некоторых случаях выделяются два других вида критериев оптимизации. Это, во-первых, **прагматические критерии** - выработанные практикой качественные или количественные характеристики оптимальности работы различных систем и, во-вторых, **математические критерии** - разработанные математиками математические критерии оптимальности, положенные в основу аналитических, графоаналитических, численных и машинных методов оптимизации.

В настоящее время наблюдается сближение этих двух критериев: с одной стороны, появились новые математические методы оптимизации, такие, как принцип максимума и динамическое программирование, которые лучше приспособлены для решения практических задач оптимизации, с другой стороны, практика проектирования все чаще пользуется критериями оптимальности, удобными в математическом смысле. Так произошло с критерием среднеквадратической ошибки, принятым в качестве оценки точности работы автоматических систем регулирования, и критерием вероятности, утвердившимся как количественная оценка эффективности для работы системы.

На практике используется целый ряд критериев оптимизации. Выбор того или иного критерия зависит от экономиста или конструктора системы управления, и в этом содержится элемент нестрогости. В то же время, при использовании в оптимизирующих расчетах библиотек прикладных программ для языков программирования все чаще применяют типовые критерии, которые становятся общепринятыми и заносятся непосредственно в технические задания.

Далее рассматривается ряд примеров критериев оптимизации, которые используются в инженерной практике.

Критерий среднего квадрата ошибки - требование минимума дисперсии или квадрата ошибки между заданным $h(t)$ и выходным $x(t)$ сигналами системы.

Этот критерий применяется при оценке качества работы автоматизированных

систем регулирования и удобен при решении математических задач оптимизации. Требование минимума дисперсии или квадрата ошибки (рис.2) между заданным (или желаемым) $h(t)$ и выходным $x(t)$ сигналами системы записывается как:

$$e_{\text{cp}}^2 = [h(t) - x(t)]_{\text{cp}}^2 \rightarrow \min$$

и означает большую нежелательность (по сравнению с линейным законом) больших (чем малых) по значению ошибок (рис.3). Причем в соответствии с рис.2 $h(t)$ получается из полезного входного сигнала $m(t)$ с помощью заданного оператора $x(t)$, в то время как реальный сигнал $x(t)$ получается из входного сигнала системы $s(t)$ с помощью оператора $k(t)$, который следует найти. При использовании критерия:

$$|e_{\text{cp}}| = |h(t) - x(t)|_{\text{cp}} = \min,$$

где " $_{\text{cp}}$ " означает усреднение по ансамблю, считается, что вред, наносимый ошибкой, пропорционален ее величине.

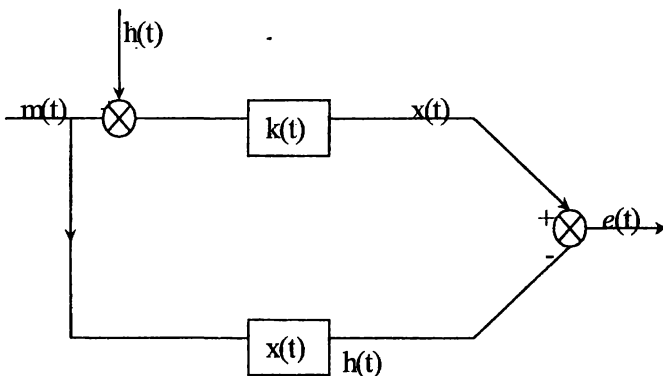


Рис. 2. Схема определения ошибки автоматической системы регулирования

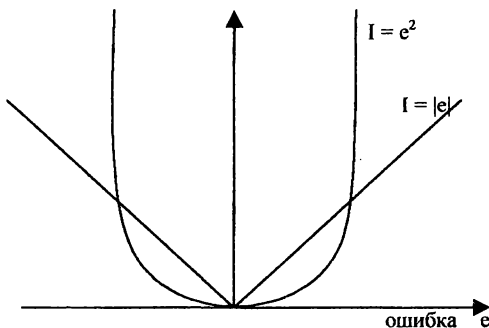


Рис. 3. Оценка качества управления по величине дисперсии

Средний квадрат ошибки e_{cp}^2 - это функционал от ее импульсной переходной функции и для стационарных сигналов и линейной системы имеет вид:

$$e_{cp}^2 = R_h(0) - 2 \int_0^{\infty} k(\tau) R_{hs}(\tau) d\tau + \int_0^{\infty} k(\tau) d\tau \int_0^{\infty} k(\tau_1) R_s(\tau - \tau_1) d\tau_1,$$

где $R_h(\tau)$ и $R_s(\tau)$ - функции корреляции желаемого $h(t)$ и входного $s(t)$ сигналов, а $R_{hs}(\tau)$ - их взаимная функция корреляции.

Если при минимизации требуется обеспечить заданное значение динамической ошибки, то добавляются условия:

$$\int_0^{\infty} k(\tau)(-\tau)^z d\tau = \mu_z, \quad z = 1, 2, \dots, m,$$

где μ_z - заданные числа, и задача становится вариационной задачей на условный экстремум.

Интегральный критерий - это критерий, имеющий вид интеграла по отрезку (в общем случае по области), на котором (ой) задана искомая функция. Такой критерий, в частности, используется для определения параметров системы управления, оптимальной в переходном режиме, и в качестве него иногда выбирается минимум функционала:

$$I_1 = \int_0^{\infty} [e^2 + T^2 (de/dt)^2] dt,$$

где e - ошибка рассогласования в системе (рис.4).

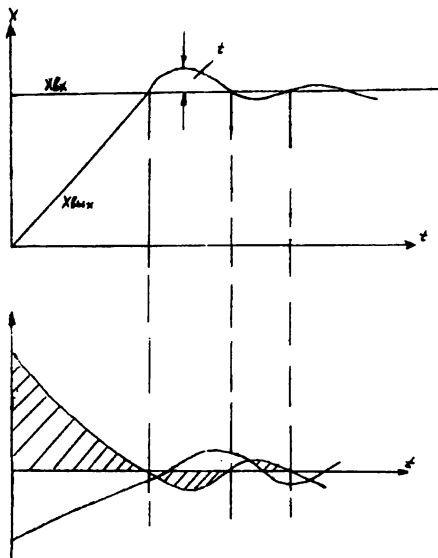


Рис. 4. Интегральный критерий качества

Оптимальная система управления - система, реализованная в виде набора правил, стратегии, согласно которым следует поступать в соответствующих ситуациях для получения оптимального решения.

Требованием минимума функционала:

$$I_1 \rightarrow \min$$

можно обеспечить в системе переходный процесс с малыми отклонениями, величина которых определяет величину интеграла:

$$\int_0^{\infty} e^2 dt.$$

Переходный процесс достаточно плавный, без резких колебаний, что определяется величиной интеграла

$$\int_0^{\infty} T^2 (de/dt)^2 dt,$$

который по существу включает управление по производной. Дело в том, что при переходе нулевого значения ошибки e производная e' принимает большие значения и из-за этого возникают большие переколебания. Наличие второго члена в функционале уменьшает значение производной, способствуя меньшим колебаниям.

Интегральный критерий требует минимума суммарной площади, ограниченной кривыми ошибки, ее производной и осью абсцисс, причем последняя площадь берется с весом T . Из рис.4 видно, что эти две кривые "работают" со сдвигом примерно в 90 градусов, и коэффициент T осуществляет оптимальный баланс между управлением по ошибке и по производной.

Критерий максимального быстродействия состоит в минимизации времени, за которое управляемый объект должен перейти в заданное состояние.

Этот критерий возник при зарождении вариационного исчисления (первая задача которого – задача о "брахистохроне", кривой наискорейшего спуска, и была задачей быстродействия) и основное развитие получил при решении военных задач в 60-е гг. XX в., в которых быстродействие является принципиальным фактором.

В наиболее распространенном случае задача оптимизации по быстродействию сводится к получению переходного процесса, заканчивающегося в кратчайшее время. Будь то система управления ракетой или антенной радиолокационной станции, требуется, чтобы переходный процесс заканчивался в минимальное время. Дело в том, что до окончания переходного процесса система не может выполнить своего основного назначения следящей системы, например антенна радиолокационной станции не может следить за входным сигналом (рис. 5). Для этого случая в функционале:

$$I = \int_a^b F(x, y, y') dx \rightarrow \min$$

необходимо положить:

$$F(x, x', t) = 1$$

и, изменив $x \rightarrow t$, $y \rightarrow x$, $y' \rightarrow x'$, получить:

$$I_2 = \int_{t_0}^{t_k} F(x, x', t) dt = t_k - t_0 \rightarrow \min,$$

причем t_0 соответствует начальным координатам процесса, а t_k - конечным.

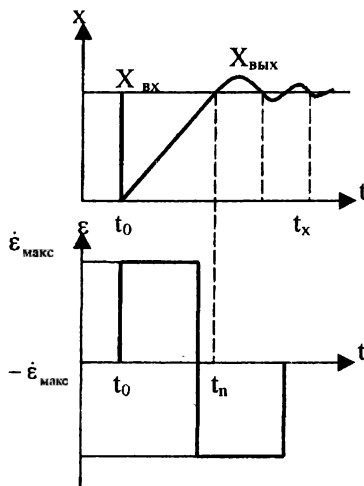


Рис. 5. Система, оптимальная по быстродействию

Наиболее распространено получение оптимального переходного процесса с включением максимального ускорения в начале с последующим переходом на максимальное торможение. В этом случае необходимо только определить момент переключения t_n . Задача максимального быстродействия может возникнуть не обязательно в связи с переходным процессом следящих систем. Если, например, требуется за наименьшее время доставить летательный аппарат с Земли на Луну, то эта задача также сведется к задаче о максимальном быстродействии.

Критерий минимума стоимости в единицу времени - стоимость функционирования совокупности систем массового обслуживания в единицу времени.

В качестве другого примера функционала, встречающегося в практике проектирования оптимальных систем, можно привести стоимость функционирования совокупности систем массового обслуживания (или сети массового обслуживания) в единицу времени:

$$C = c_1 \rho_{\text{ср}} + c_2 w_{\text{ср}},$$

где $\rho_{\text{ср}}$ — среднее число свободных приборов; $w_{\text{ср}}$ — среднее число заявок, ожидающих своей очереди; c_1 и c_2 — стоимости простоев одного прибора и заявки соответственно в единицу времени.

Из-за случайности потока заявок и времени их обслуживания всегда имеется какое-то среднее число простаивающих приборов или ожидающих заявок. Требуется так распределить число приборов по разным системам, чтобы $C = \min$. Такая кибернетическая модель и критерии широко используются при

создании оптимальных систем управления в сфере обслуживания, например управления системой гостиниц. В качестве заявок здесь выступают клиенты, в качестве приборов - администраторы. Поток клиентов и время их обслуживания — случайные величины. Плохо, и когда простаивают администраторы, и когда ожидают клиенты. Минимум функционала:

$$C = c_1 p_{\text{ср}} + c_2 w_{\text{ср}}$$

означает оптимальный выбор числа администраторов, основанный на определенной статистике потока клиентов. Для решения задачи должны быть известны значения стоимости простоя клиентов и администраторов. Величины $p_{\text{ср}}$ и $w_{\text{ср}}$ являются функциями числа приборов на отдельных участках.

В отличие от предыдущих случаев, эта задача имеет дело с дискретным изменением параметров, так как число приборов может изменяться только дискретным образом. Поэтому здесь неприменимо классическое вариационное исчисление, и необходимо применять специальные методы типа дискретного и целочисленного программирования.

Критерий минимума критического времени выполнения работы – это минимизация критического пути по графу при ограниченных ресурсах.

В связи с интенсивным внедрением сетевых методов планирования и управления возникают задачи о критическом пути. Например, выполнение сложного проекта сводится к последовательности выполнения какого-то определенного количества работ. Для отображения этого процесса прибегают к геометрической интерпретации с помощью графа (рис.6).

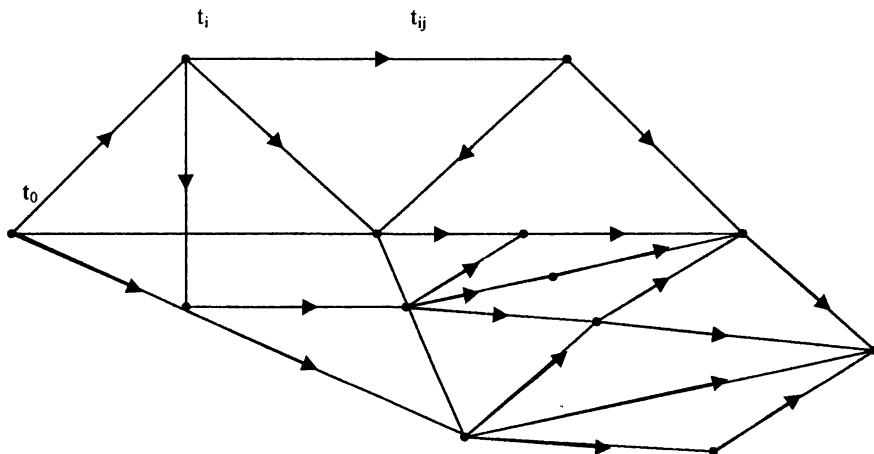


Рис. 6. Сетевой граф комплекса работ

Узел графа обозначает конец одной работы и начало другой. Дуга, или ребро, графа - работа, а длина ребра пропорциональна времени выполнения работы. Пусть длительность выполнения отдельной работы:

$$t_{ij} = t_j - t_i,$$

где t_i и t_j — моменты времени, соответствующие началу и концу работы.

Критическим в графе будет такой путь, на котором суммарное время выполнения работ максимально. Этот путь задерживает всю разработку: без его

уменьшения невозможно сократить время выполнения всей разработки. Критический путь определяется решением экстремальной задачи, в которой обращается в максимум следующее выражение:

$$t_{\text{кр}} = \sum_{i,j} t_{ij} \rightarrow \max.$$

Суммирование в этой двойной сумме необходимо производить таким образом, чтобы получить путь из начальной вершины t_0 в конечную t_k без разрыва и дважды не пройти по одной и той же дуге. Критерий минимума критического времени:

$$I = t_{\text{кр}} \rightarrow \min,$$

означает минимизацию критического пути при ограниченных ресурсах. При этом наличные ресурсы распределяются на те работы, которые лежат на критическом пути. В данном случае, по существу, решается минимаксная задача, характерная для теории игр:

$$\min \max \sum_{i,j} t_{ij} = ?,$$

причем максимум выбирается среди всех путей в графе по времени выполнения работ, а минимум берется по ресурсам для работ, лежащих на критическом пути.

Минимаксный критерий - используется для определения оптимальной стратегии при наличии ситуации, когда интересы двух сторон противоположны.

Минимаксный критерий широко используется для определения оптимальной стратегии при наличии конфликтной ситуации, когда интересы двух сторон противоположны, т.е. выигрыш одной стороны означает проигрыш другой. В этом случае часто приходится выбирать среди худших для себя стратегий противника наименее худшую, т.е. брать максимум по множеству стратегий противника и минимум по собственным стратегиям. В этом и заключается минимаксный критерий, широко используемый в теории игр. В теории матричных игр задается матрица платежей:

$$|| a_{ij} ||,$$

где: $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Каждый элемент этой матрицы означает платеж противнику в случае, когда он применяет стратегию j , а наша сторона - стратегию i . Требуется найти среди множества худших для нас стратегий противника наименее плохую, т.е. решить минимаксную задачу:

$$\min_i \max_j a_{ij} = ?$$

Нетрудно убедиться, что если поменять знаки a_{ij} на обратные, а это физически означает замену проигрыша нашей стороны на выигрыш, то будет решаться максиминная задача:

$$\max_i \min_j (-a_{ij}) = ?$$

В некоторых задачах, имеющих так называемую седловую точку,

$$\min_i \max_j a_{ij} = \max_i \min_j a_{ij}$$

1.4. Классификация методов оптимизации

Классификация методов оптимизации представляет собой достаточно сложную задачу, так как в основном они исторически развивались независимо один от другого с использованием различных концепций, математических аппаратов и т. д. Однако специалисту по информатике и вычислительной технике необходимо ознакомиться с ними.

Разумеется, что приводимая классификация (как и любая классификация) носит условный характер, но в целом она позволяет сразу охватить все особенности методов.

Возможно несколько подходов к классификации. Следует различать методы определения экстремума функции и функционала (рис. 7). Поскольку функция является частным случаем функционала, методы отыскания экстремума функции проще. Методы динамического программирования и принципа максимума применяются для отыскания экстремума функционала и функции. Прямые методы вариационного исчисления (методы Рунге, Эйлера и др.), как и дискретный вариант уравнения Эйлера, сводят задачу отыскания экстремума функционала к экстремуму функции.

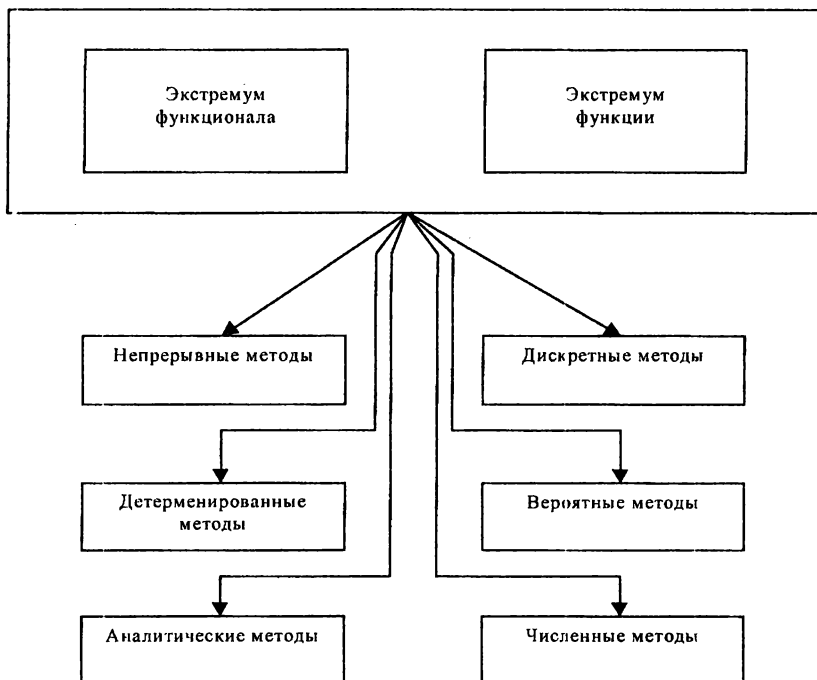


Рис. 7. Схема методов оптимизации

Методы отыскания экстремума функции получили большое развитие в связи с вычислительными трудностями решения системы алгебраических уравнений вида:

$$dF(x_1, x_2, \dots, x_n)/dx_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

особенно при наличии ограничений на координаты x_j .

Классическая математика ограничивалась разработкой методов решения и доказательствами принципиальной разрешимости таких систем уравнений, что привело к созданию аналитических методов оптимизации (методы принципиальной разрешимости уравнений оптимизации). При решении конкретных задач важно владеть процедурами, позволяющими доводить решение до числовых данных. Это заставило искать и разрабатывать **численные методы оптимизации** (методы решения конкретных инженерных задач с доведением решения до числовых данных). Практика проектирования конкретных систем управления требует применения обоих методов. [8.]

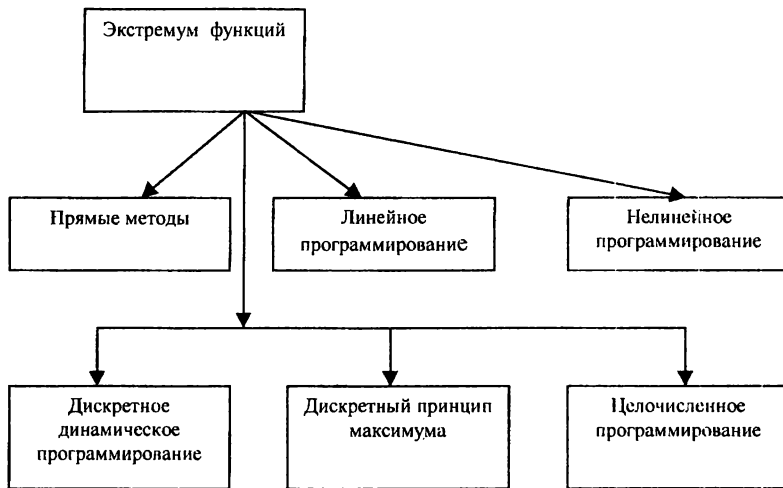


Рис. 8. Методы отыскания экстремумов функций

За аналитическими методами остается преимущество, заключающееся в возможности определения качественной картины поведения оптимальной системы при изменении ее параметров и структуры. Численные же методы обеспечивают получение конкретных числовых значений параметров. Рациональное объединение этих методов производится при разработке человеко-машинных методов оптимизации, использующих диалог человека и ЭВМ, базы данных и возможности современных телекоммуникационных систем. При этом обычно повторяют вычисления, изменяя условия, используя, где необходимо, аналитические методы, представленные в виде стандартных библиотечных программ, и, самое главное, оперативно включая в процедуру отыскания оптимального управления интеллектуальные способности человека.

При таком способе оптимизации исходный критерий оптимальности может быть математически нестрого формализован в виде функции или функционала.

Так, он может состоять из нескольких положений, сформулированных достаточно четко на словесном, содержательном уровне, что при наличии диалога человек — машина вполне допустимо.

В задачах с ограничениями большое развитие получили методы линейного и нелинейного программирования, прямые методы отыскания экстремума функции, а также дискретные принципы максимума и динамическое программирование (рис. 8).

Методы отыскания экстремума функционала ведут свое начало от классических методов Эйлера — Лагранжа — Гамильтона и заканчиваются динамическим программированием и принципом максимума (рис. 9). В них также содержатся прямые методы отыскания экстремума функционала и различные частные методы.

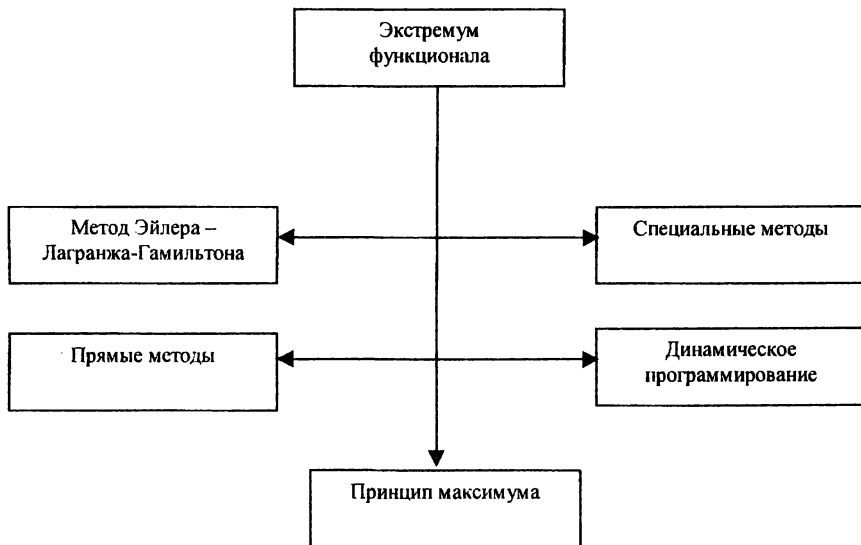


Рис. 9. Методы отыскания экстремумов функционалов

Почти во всех методах:

- Эйлера — Лагранжа — Гамильтона;
- принципе максимума;
- динамическом программировании;
- прямых методах отыскания экстремума функции

можно выделить дискретные и непрерывные модификации, детерминированные и случайные варианты.

Дискретная задача оптимизации возникает всякий раз, когда требуется найти оптимальное значение переменных, которые заданы, так же как и функция от них, в виде набора дискретных значений.

В связи с разработкой автоматизированных информационных систем управления (АИСУ) большое значение приобрели методы целочисленного программирования. Одна из основных задач АИСУ - оперативно-календарное планирование, относится к задачам целочисленного программирования. Единого общего метода решения задач целочисленного программирования нет. Разработано много способов решения пригодных для частного класса задач,

среди которых большое место занимают нестрогие эвристические методы. Особого внимания среди них заслуживают **лингвистические методы оптимизации** (методы, имитирующие применяемые человеком методы оптимизации и планирования с добавлением эффективных аналитических и числовых процедур). Они ближе всего подходят к человеческому способу мышления и удобны для реализации на ЭВМ с помощью проблемно-ориентированных языков. Человеко-машинные методы решения целочисленных задач оптимизации являются по существу своему лингвистическими в широком смысле.

В заключение надо отметить, что одни и те же методы, рассматриваемые с разных точек зрения, могут использоваться как аналитические и как численные. Так, градиентный метод используется в прямых методах отыскания экстремума функции и методах нелинейного (квадратичного и выпуклого) программирования. Во втором случае он используется как аналитический, в первом — как численный метод.

1.5. Системный анализ и оптимизация

Системный анализ - это синтез идей и принципов теории исследования операций и методов теории управления с возможностями современной вычислительной техники.) В настоящее время используются следующие понятия: "системный анализ", "теория систем" и "системный подход". Слово система и связанные с ним термины получили широкое распространение. Это произошло потому, что на передний план все более и более выступает необходимость изучения сложных комплексов (систем). Такая необходимость определяется усложнением создаваемых технических конструкций, устройств, технологий и всех совокупностей хозяйственных связей, с которыми приходится иметь дело экономистам, хозяйственным руководителям и инженерам.

Потребность изучения биологических объектов и проблем экологии, которые с каждым годом становятся все актуальнее, также приводит исследователя к сложным системам.

Понятие система относится к числу тех, для которых трудно дать строгое определение. Часто системой называют совокупность элементов, между которыми существуют те или другие связи (например, система двух притягивающихся масс). Мы не будем пытаться давать строгое определение системы. Для наших целей достаточно того интуитивного понятия системы, которое имеется у каждого, изучающего инженерные дисциплины.

В ответ на потребности изучения сложных систем возникла дисциплина "системный анализ". Одной из центральных проблем системного анализа является проблема принятия решений. Инструмента теории исследования операций для этих целей часто оказывается недостаточно. Как уже было сказано выше, неопределенность цели в задачах оптимизации состоит в многокритериальности. Трудно соизмерить и сопоставить между собой различные требования - трудно формализовать понятие "цель", объединить показатели. В ряде задач либо вообще нельзя сколько-нибудь точно поставить цели, либо те цели, которые хотелось бы поставить, нереальны (примеры подобных ситуаций дает порой экономика). В таких случаях на помощь приходит системный анализ.

Допустим, что речь идет о планах перспективного развития топливно-энергетического комплекса. Как определить цели? Конечно, всегда можно сформулировать требования: топлива побольше, затрат поменьше и т. д. Но для проекта плана необходимы более или менее точные показатели и реалистические цели, которые согласуются с потребностями страны и могут быть обеспечены существующими ресурсами. В таких проблемах самый главный момент - сформулировать цели, которые должен преследовать проект. Цель перестает

быть внешним фактором, как, например, в теории исследования операций или теории управления, она становится самостоятельным объектом исследования.

Что надо исследователю для того, чтобы установить (правильно сформулировать) те реальные цели, осуществление которых должны обеспечивать создаваемые конструкции или хозяйственный комплекс? Очевидно, что для этого необходимо, прежде всего, представить себе функционирование будущей конструкции, сопоставить ее возможности с теми ресурсами, которыми будут располагать разработчики. Достичь этого можно с помощью физических (макеты будущих конструкций) или математических моделей.

Таким образом, чтобы использовать математику, сначала необходимо описать систему моделей и создать математический аппарат, который позволит провести анализ изучаемого процесса, увидеть последствия принятых решений, оценить возможности при различных альтернативах, и только на основе такого анализа можно сформулировать цели. Сложность изучаемых и проектируемых систем приводит к необходимости создания специальной техники исследования, использующей аппарат имитации, - воспроизведения на ЭВМ специально организованными системами математических моделей функционирования проектируемого или изучаемого комплекса.

Последнее не означает недооценки классических методов анализа. Более того, эффективное использование имитационных систем необходимо предполагает предварительную обработку модели. Исследование динамики процесса, позволяющее увидеть перспективы и наметить цели, - это лишь один из аспектов системного анализа, может быть, и самый важный, но не исчерпывающий всего многообразия вопросов, на которые он в состоянии дать ответ. Это всего лишь первый шаг исследования. Следующая проблема состоит в том, чтобы реализовать намеченные цели, т. е. сформулировать решения, в результате выполнения которых будет обеспечено достижение этих целей (выбранные параметры создаваемых конструкции или проекта).

Среди задач, возникающих в связи с созданием соответствующих проектов, большое место занимают проблемы сочетания структурных и функциональных аспектов. Один из трудных вопросов, связанных с этим, относится к проблемам проектирования иерархической организации. Любые более или менее сложные системы всегда организованы по иерархическому принципу в связи с тем, что централизованные обработка информации и принятие решений часто бывают невозможны из-за большого объема информации, которую следует собирать и перерабатывать, из-за возникающих при этом задержек и искажений и т. д. Если речь идет о проектировании технических систем, то задача исследования систем (задача проектировщика) состоит в разработке функциональной схемы, которая может быть реализована заведомо не единственным способом, и в определении частных целей.

Значительно сложнее обстоит дело, когда речь идет о народнохозяйственных комплексах, функционирование элементов которых зависит от того, как управляют ими люди. В отличие от машины, человек всегда имеет собственные цели и интересы, и проектировщику системы уже недостаточно только формулировать цели для нижних звеньев. Необходимо еще быть уверенным, что эти цели будут достигнуты, что нижние звенья выполнят требования верхних звеньев. Для этого, в свою очередь, должен быть спроектирован специальный "механизм", одного приказа для достижения цели бывает недостаточно. Вот почему возникает потребность в специальной теории, которая должна развивать принципы создания иерархии в управлении и методы их анализа. Теория иерархических систем, которая изучает некоторые из аспектов этой проблемы, является одной из важнейших частей системного анализа.

Таким образом, системный анализ - это дисциплина, развивающая методы проектирования сложных технических, народнохозяйственных и экологических

систем) Системный анализ, как дальнейшее развитие теории исследования операций и теории управления, включает в себя эти дисциплины со всем арсеналом средств, развитых в их рамках.

В настоящее время сложилась некоторая условная классификация математических моделей по характеру и способу использования произвольных функций и параметров, которые они содержат. В их число входят следующие виды моделей:

1) Модели без управления, которые описывают динамические процессы (с помощью, например, дифференциальных или разностных уравнений) и не содержат свободных параметров или функций. К их числу относится большинство прогностических моделей, когда заданное начальное состояние определяет траекторию процесса. Модели такого рода могут быть и стохастическими, например, они могут содержать случайные величины и функции вида:

$$x' = f(x, t, \xi),$$

где x - некоторый случайный вектор с известным законом распределения. В этом случае исследуются не отдельные траектории, а их статистические свойства, например среднее значение. Модели подобного рода являются типичными для описания процессов, происходящих в неживой природе.

2) Модели, которые могут быть использованы для оптимизации некоторых действий. Например, динамический процесс, модель которого описывается уравнением вида:

$$x' = f(x, t, u),$$

где выбор функции $u(t, x)$ находится в распоряжении какого-то субъекта. Вектор-функция $u(f, x)$ называется управлением. Управление выбирается из условия достижения некоторой цели. Распространенный класс задач с помощью данной модели можно описать следующим образом: за время T перевести систему из состояния

$$x(0) = x_0$$

в состояние

$$x(T) = x_T$$

так, чтобы "затраты" были минимальными, т. е.:

$$\int_0^T F(x, u, t) dt \rightarrow \min.$$

Ограничения $x(0) = x_0$, $x(T) = x_T$ и целевую функцию в понятие модели не включают. Для одной и той же модели $x' = f(x, t, u)$ могут ставиться разные задачи.

3) Модели, которые могут использоваться для анализа конфликтных ситуаций. Предположим, что динамический процесс определяется действиями нескольких субъектов, в распоряжении которых имеются управления: $u, v, w, \dots$ Тогда:

$$x' = f(x', t, u, v, w, \dots),$$

причем управления будут выбираться из условий вида:

$$\int_0^T F_1(x, u, v, w, \dots, t) dt \rightarrow \min,$$

каждое из которых отражает вполне определенные интересы того или другого субъекта.

2. КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ, ОСНОВЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

2.1. Основные понятия, используемые в классических методах

Перед началом изложения аппарата классического вариационного исчисления необходимо вспомнить некоторые основные понятия.

В классическом вариационном исчислении используются следующие классы функций (рис. 10):

а) **непрерывные функции** - график таких функций представляет собой кривую без разрывов;

б) **кусочно-непрерывные функции** - функции, которые непрерывны на интервале всюду, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода;

г) **гладкая функция** - такая функция, у которой в заданном интервале непрерывна первая производная;

д) **кусочно-гладкая функция** - такая функция, у которой в заданном интервале первая производная имеет конечное число точек разрыва первого рода.

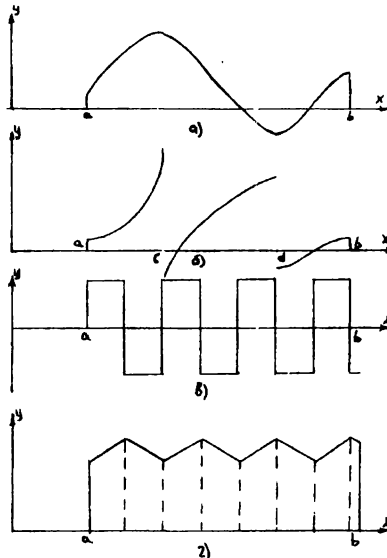


Рис. 10. Графики различных функций управления: а) непрерывные функции; б) кусочно-непрерывные функции; в) гладкая функция; г) кусочно-гладкая функция

Разрывы функций классифицируются следующим образом:

бесконечный разрыв - значение функции при подходе к точке разрыва устремляется к бесконечности;

разрыв первого рода (конечный) - у функции в точке разрыва существуют конечные пределы справа и слева;

устраняемый разрыв - пределы справа и слева в точке разрыва равны между собой, но значение функции в этой точке отлично от них.

Рассмотрим понятия глобального и локального экстремумов. **Глобальный экстремум** достигается сравнением всех кривых данного класса, а **локальный экстремум** - достигается сравнением только близких в некотором смысле кривых.

Отсюда ясно, что всякий глобальный экстремум одновременно и локальный.

Например, требуется проложить кратчайшую дорогу между двумя пунктами, разделенными горой. Естественно, что ее следует искать среди путей, огибающих гору слева или справа. Допустим, наикратчайший путь слева короче, чем справа. Тогда путь слева будет давать глобальный экстремум, а путь справа - локальный.

Классическое вариационное исчисление - теория необходимых и достаточных условий локального экстремума, которым должна удовлетворять искомая функция в задачах на экстремум, содержащих ограничения только типа равенства и имеющих целевой функционал интегрального вида.

Классические методы вариационного исчисления не применимы к отысканию функций, оптимальных в классе функций, графики которых изображаются в виде разрывных и ступенчатых кривых, представленных на рис. 10. Для таких функций характерно наличие вертикальных участков, где первая производная принимает бесконечные значения.

2.2. Уравнение Эйлера

Пусть на некоторой гладкой кривой, заданной на отрезке $[a, b]$ и имеющей в его концах заданные значения $y(a) = y_a$ и $y(b) = y_b$, достигается экстремум функционала:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n) = y. \quad (2-1)$$

Надо определить необходимые условия, которым должна удовлетворять функция $y(x)$, чтобы на ней достигался минимум. Для этого сравним значения функционала для близких к $y(x)$ функций, придавая $y(x)$ **вариацию**:

$$y(x) + \varepsilon \eta(x),$$

где ε - число; $\eta(x)$ - произвольная гладкая функция, удовлетворяющая условиям $\eta(a) = \eta(b) = 0$ и $\eta(x) \geq 0$.

Рассмотрим разность функционалов:

$$\Delta I = \int_a^b F(x, y + \varepsilon \eta, y' + \varepsilon \eta') dx - \int_a^b F(x, y, y') dx.$$

Разложим ее в ряд Маклорена по ε (производные берутся при $\varepsilon = 0$):

$$\Delta I = \varepsilon dI/d\varepsilon + \varepsilon^2/2 (d^2 I/d\varepsilon^2) + \dots \quad (2-2)$$

Выражение:

$$\delta I = \varepsilon dI/d\varepsilon,$$

которое является главной линейной частью функционала, называется **первой вариацией функционала**.

В свою очередь:

$$\delta^2 I = \varepsilon^2 / 2 (d^2 I / d\varepsilon^2)$$

называют **второй вариацией функционала**. При малых ε всеми членами в выражении (2-2), кроме первого, можно пренебречь, т.е.:

$$\Delta I \approx \delta I.$$

Если на кривой $y(x)$ достигается локальный минимум, то функция $I(y + \varepsilon \eta)$ аргумента ε имеет локальный минимум при $\varepsilon = 0$, поэтому:

$$\Delta I \approx \delta I = \varepsilon dI/d\varepsilon \geq 0. \quad (2-3)$$

Для получения **уравнения Эйлера** используем формулы (2-1) и (2-2):

$$\begin{aligned} dI/d\varepsilon &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b F(x, y + \varepsilon \eta, y' + \varepsilon \eta') dx = \int_a^b [\partial F / \partial y (d(y + \varepsilon \eta)/d\varepsilon) + \\ &+ \partial F / \partial y' (d(y' + \varepsilon \eta')/d\varepsilon)] dx = \int_a^b (\eta \partial F / \partial y + \eta' \partial F / \partial y') dx. \end{aligned}$$

Проинтегрируем второй член по частям:

$$\int_a^b (\eta' \partial F / \partial y') dx = F_{y'} \eta \Big|_a^b - \int_a^b \eta (dF_{y'}/dx) dx,$$

так как $\eta(x)$ обращается в нуль в точках a и b , то:

$$\int_a^b (\eta' \partial F / \partial y') dx = - \int_a^b \eta (dF_{y'}/dx) dx,$$

откуда:

$$\delta I = \int_a^b (F_y - dF_{y'}/dx) \eta dx. \quad (2-4)$$

Теперь к выражению (2-4) требуется применить **лемму Лагранжа**, которая формулируется следующим образом: если непрерывная функция $M(x)$ обладает тем свойством, что:

$$\int_a^b M(x) \eta(x) dx = 0 \quad (2-5)$$

для любой гладкой функции $\eta(x)$, то обязательно

$$M(x)=0$$

$$(2-6)$$

для всех $a \leq x \leq b$.

Действительно, предположим противное, пусть хотя бы в одной точке c , где $a \leq c \leq b$, $M(c) \neq 0$, для определенности $M(c) > 0$. Тогда в силу непрерывности M , в некоторой окрестности точки c будет $M(x) > 0$. Выберем в качестве функции $\eta(x)$ такую, которая больше нуля в окрестностях точки c , а на остальном интервале равна нулю (очевидно, такая функция существует, см. рис. 11). При таком выборе произведение $M(x)\eta(x) > 0$ в окрестности точки $x = c$ и $M(x)\eta(x) = 0$ вне этой точки, поэтому интеграл будет положителен, что противоречит исходному условию. Тем самым лемма Лагранжа доказана.

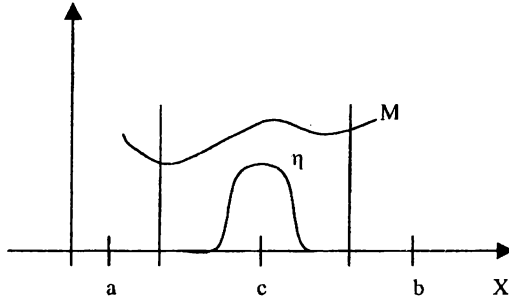


Рис. 11. Пояснение к теореме Лагранжа

В соответствии с формулами (2-4) - (2-6) необходимое условие экстремума запишется как:

$$F_y - d F_{y'} / dx = 0.$$

$$(2-7)$$

24.

Это и есть **уравнение Эйлера**. **Общее решение (2-7)** содержит две неопределенные постоянные, для определения которых требуется удовлетворение двух условий. Как правило, в качестве таких условий задаются значения функции $y(x)$ в начале и конце интервала $y(a)$ и $y(b)$.

Таким образом, экстремальная задача сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения, так как в общем случае функция F нелинейна относительно y и y' .

Заметим, что:

$$d F_{y'} / dx = \frac{\partial F_{y'}}{\partial x} + \frac{\partial F_{y'}}{\partial y} (dy/dx) + \frac{\partial F_{y'}}{\partial y'} (d y' / dx).$$

Подставляем это выражение в уравнение Эйлера и получаем:

$$F_y - F_{yx} - F_{yy} y' - F_{y'y} y'' = 0. \quad (2-8)$$

Отсюда видно, что в общем случае уравнение Эйлера является нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка и поэтому его решить не удастся. При нашем выводе для справедливости этого уравнения требуется непрерывность как первой, так и второй производных функции $y(x)$, т. е. заранее ставится условие непрерывности первых двух производных на экстремали.

Рассмотрим в качестве примера **задачу о длине кривой**, соединяющей

две данные точки:

$$I = S = \int_0^1 \sqrt{1 + \dot{y}_2} dx.$$

В данном случае

$$F(x, y, y') = \sqrt{1 + \dot{y}_2}$$

$$F_{y'} = 0; \quad F_y' = \dot{y} / \sqrt{1 + \dot{y}_2}$$

$$dF_{y'}/dx = \frac{\ddot{y}}{[1 + \dot{y}_2]^{3/2}}.$$

Откуда уравнение Эйлера имеет вид:

$$dF_{y'}/dx = 0.$$

Следовательно, дифференциальные уравнения для экстремалей и решение запишутся как:

$$y'' = 0;$$

$$y = C_1 x + C_2$$

Это есть уравнение прямой. Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из того условия, что прямая должна проходить через обе данные точки. Таким образом, прямая линия обеспечивает кратчайшее расстояние между двумя точками.

Далее рассмотрим частные случаи уравнения Эйлера.

1. Допустим, F не зависит от y . Тогда:

$$dF_{y'}/dx = 0,$$

и следовательно:

$$F_{y'} = \text{const.}$$

Из этого уравнения определяем y' как функцию x и затем - искомую функцию $y(x)$ как интеграл от этого решения.

2. Пусть F не зависит от x явно, т.е.:

$$F = F(y, y'),$$

тогда уравнение (2-8) запишется, как:

$$F_y - F_{yy'} y' - F_{y'y'} y'' = 0.$$

Умножаем все члены на y' (y' не должно обращаться в нуль):

$$d(F - y' F_y')/dx = 0,$$

откуда

$$F - y' F_y' = C.$$

Это равенство называют **первым интегралом Эйлера** (интегралом энергии).

3. Допустим, что F зависит только от y' . В этом случае уравнение Эйлера принимает вид:

$$dF_{y'} / dx = 0$$

и $y' = \text{const} = k$, уравнение экстремалей запишется как:

$$y = kx + b,$$

т. е. экстремали будут прямыми линиями.

4. Наконец, допустим, что $F_{y'y'} = 0$. В частности, это может быть, когда $F = F(x, y)$ или $F = M(x, y) + N(x, y) y'$, т.е. функционал или совсем не зависит от производной y' , или зависит от нее линейно. **Функционалы**, для которых $F_{y'y'} = 0$ называются **вырожденными** в силу следующих соображений. Перепишем формулу (2-8)

$$y'' = (F_y - F_{y'x} - F_{y'y'} y') / F_{y'y'}. \quad (2-9)$$

Из этого выражения видно, что для вырожденных функционалов не существует второй производной для экстремали, она не является кусочно-гладкой и, следовательно, допустимой функцией, для которой выводилось уравнение Эйлера.

$F_{y'y'}$ может обращаться в нуль для невырожденных функционалов только в отдельных точках, за исключением которых формула (2-9) дает значение второй производной, т.е. экстремаль невырожденного функционала является кусочно-гладкой функцией, имеющей на отдельных участках непрерывную вторую производную. Изломы кривой могут быть в тех точках, в которых или $F_{y'y'} = 0$, или числитель правой части формулы (2-9) терпит разрыв.

2.3. Условие Лежандра

Далее будет рассмотрено **условие Лежандра** – необходимое условие экстремума, состоящее в неотрицательности главного коэффициента второй вариации, позволяющее отличать минимум от максимума, которое играет важную роль в классическом вариационном исчислении. Так как на экстремали первая вариация δI обращается в нуль, то знак приращения определяется в основном второй вариацией, поэтому в случае минимума $\delta^2 I \geq 0$, в случае максимума $\delta^2 I \leq 0$.

Очевидно, что:

$$\begin{aligned} d^2 I / d\epsilon^2 = \int_a^b d^2 [F(x, y + \epsilon \eta, y' + \epsilon \eta')] dx / d\epsilon^2 = \int_a^b (F_{yy} \eta^2 + 2 F_{yy'} \eta \eta' + \\ + F_{y'y'} \eta'^2) dx. \end{aligned}$$

Преобразуем второй член этого выражения, взяв интеграл по частям:

$$2 \int_a^b F_{yy}' \eta \eta' dx = \int_a^b F_{yy}' d\eta^2 = F_{yy}' \eta^2 \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b F_{yy}'' \eta^2 dx,$$

откуда:

$$d^2 I / d\epsilon^2 = 2 \int_a^b (P \eta^2 + R \eta'^2) dx, \quad (2-10)$$

где

$$P = 1/2 (F_{yy} - d F_{yy}' / dx);$$

$$R = 1/2 F_{yy}''.$$

Из формулы (2-10) следует, что для выполнения условия минимума:

$$d^2 I / d\epsilon^2 \geq 0 \quad (2-11)$$

необходимо, чтобы:

$$F_{yy}'' \geq 0. \quad (2-12)$$

Действительно, поскольку функция $\eta(x)$ произвольная, то ее всегда можно подобрать так, чтобы функция η^2 была мала, а η'^2 велика. Выбор следует остановить на функции $\eta(x)$ малой по абсолютной величине, но быстро и резко изменяющейся. Для такой функции знак второй вариации, очевидно, совпадает со знаком коэффициента R .

Если $R(x) < 0$ в некоторой точке, то для соответствующей $\eta(x)$ правая часть в (2-10) будет < 0 , что противоречит (2-11).

Тем самым условие Лежандра доказано.

Для задачи на максимум отсюда следует, что должно выполняться условие:

$$F_{yy}'' \leq 0. \quad (2-13)$$

Как правило, в теории рассматриваются только задачи на минимум, а к задаче на максимум можно перейти заменой знака у целевого функционала.

2.4. Некоторые вариационные задачи

Могут встречаться задачи более сложные, в частности такие, в которых концы кривых не закреплены, - **задачи с незакрепленными, или подвижными, концами**. В этом случае вариация функционала зависит от вариации искомой функции и ее концов. На рис. 12 изображены исходная $y(x)$ и проварьированная $y(x) + h(x)$ функции.

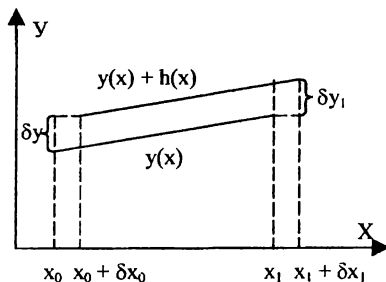


Рис. 12. Вариационная задача с подвижными концами

Приращение функционала представляется в форме:

$$\begin{aligned} \Delta I = I(y+h) - I(y) &= \int_{x_0 + \Delta x_0}^{x_1 + \Delta x_1} F(x, y+h, y'+h') dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y+h, y'+h') - F(x, y, y')] dx + \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x_1} F(x, y+h, y'+h') dx - \\ &- \int_{x_0 + \Delta x_0}^{x_0} F(x, y+h, y'+h') dx. \end{aligned}$$

Здесь первый интеграл - вариация кривой, а два последних - вариации концов. Выделим главную линейную часть приращения - вариацию δI , для чего положим малыми $h, h', \delta x_0, \delta x_1$:

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} [F_y h + F_{y'} h'] dx + F|_{x=x_1} \delta x_1 - F|_{x=x_0} \delta x_0. \quad (2-14)$$

Второй член подинтегрального выражения в формуле (2-14) проинтегрируем по частям, в результате чего получим:

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} (F_y - dF_{y'}/dx) h dx + F_{y'}|_{x_1} \delta x_1 - F_{y'}|_{x_0} \delta x_0.$$

С точностью до бесконечно малых высшего порядка можно написать (см. рис. 12):

$$h(x_0) = \delta y_0 - y' \delta x_0$$

$$h(x_1) = \delta y_1 - y' \delta x_1$$

тогда окончательно получим:

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} (F_y - dF_{y'}/dx) h dx + F_{y'}|_{x=x_1} \delta y_1 + (F - y' F_{y'})|_{x=x_1} \delta x_1 - F_{y'}|_{x=x_0} \delta y_0 - (F - y' F_{y'})|_{x=x_0} \delta x_0, \quad (2-15)$$

где есть интегральный член, зависящий от вариации кривой внутри первоначального интервала, и члены вне интеграла, зависящие от вариации концов.

Рассмотрим теперь задачу определения экстремума функционала среди кривых $y(x)$, концы которых могут перемещаться по двум кривым:

$$y = \Phi(x),$$

$$y = \Psi(x).$$

В общем случае в качестве границ могут выступать трехмерные и n -мерные кривые и поверхности в задачах, связанных с морскими переходами с одного материка на другой или космическими полетами между близко расположенными небесными телами. Примером такой задачи может быть определение минимального расстояния между окружностями (рис.13). Для решения необходимо определить не только кривую, но и положение ее концов A и B . Очевидно, что эта кривая должна быть экстремалью, так как в противном случае

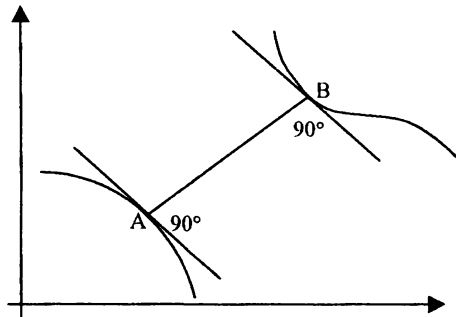


Рис. 13. Минимальное расстояние между двумя гладкими кривыми

через те же точки A и B можно было бы провести другую кривую, дающую минимум расстояния, поэтому первый член в формуле (2-14) обращается в нуль и

$$\delta I = F_{y'}|_{x=x_1} \delta y_1 + (F - y' F_{y'})|_{x=x_1} \delta x_1 - F_{y'}|_{x=x_0} \delta y_0 - (F - y' F_{y'})|_{x=x_0} \delta x_0;$$

с точностью до бесконечно малых высшего порядка запишем:

$$\delta y = \Phi(x) \delta x_0;$$

$$\delta y = \Psi(x) \delta x_1,$$

откуда условие экстремума $\delta I = 0$ приобретет вид:

$$(F_{y'} \Psi' + F_{y'} F_{y'})|_{x=x_1} \delta x_1 - (F_{y'} \Phi' + F_{y'} F_{y'})|_{x=x_0} \delta x_0 = 0.$$

Так как δx_1 и δx_0 - независимые друг от друга приращения, то:

$$(F_{y'} \Psi' + F_{y'} F_{y'})|_{x=x_1} = 0;$$

$$(F_{y'} \Phi' + F_{y'} F_{y'})|_{x=x_0} = 0.$$

Эти соотношения называются **условиями трансверсальности**. Входящие в решение уравнения Эйлера две неопределенные константы могут быть определены из этих условий. Положения концов экстремали (точки x_0 и x_1) могут быть найдены как точки пересечения экстремали с кривыми: $y = \Phi$ - первый конец, $y = \Psi$ - второй конец. Укажем случай, в котором условию трансверсальности можно дать геометрическую интерпретацию. Рассмотрим функционал вида:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx. \quad (2-16)$$

В этом случае

$$F_{y'} = f(x, y)(y' / \sqrt{1 + \dot{y}^2}) = F_{y'} / (1 + y'^2)$$

и условие трансверсальности запишется как

$$[F(1 + y' \Phi'')] / (1 + y'^2) = 0$$

откуда следует, что

$$1 + y' \Phi'' = 0; \quad y' \Phi' = -1. \quad (2-17)$$

или $y' = -1 / \Phi''$.

Аналогично для второго конца

$$y' = -1 / \Psi'. \quad (2-18)$$

Но условия (2-18) и (2-17) означают, что кривая $y(x)$ пересекает кривые $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ под прямым углом, поэтому для функционалов вида (2-16) условие трансверсальности совпадает с условием ортогональности. К такого рода функционалам относится функционал, который определяет расстояние:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx.$$

Отсюда можно утверждать, что кратчайшее расстояние между двумя кривыми получается вдоль третьей, им перпендикулярной. Так, для двух окружностей это будет перпендикуляр, проходящий через их центры.

Функционалу (2-15) также можно дать геометрическую интерпретацию (рис. 14). Функция $z = f(x, y)$ определяет некоторую поверхность в трехмерном пространстве и физически может означать, например, расход топлива на единицу длины. Таким образом, интеграл означает полный расход топлива вдоль траектории, соединяющей две граничные кривые. Вариационная задача на минимум означает определение такой траектории $y(x)$, соединяющей кривые

$y = \Phi(x)$ и $y = \Psi(x)$, вдоль которой расход топлива был бы минимален. Если рассмотреть интеграл вида:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y) \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx,$$

то его можно интерпретировать, в частности, с помощью поверхности вращения, которую описывает в трехмерном пространстве кривая, проведенная в плоскости (x, y) между кривыми $y = \Phi(x)$ и $y = \Psi(x)$, при вращении вокруг оси Ox . В этом случае $f(x, y)$ означает вес единичной площади. Элемент площади равен:

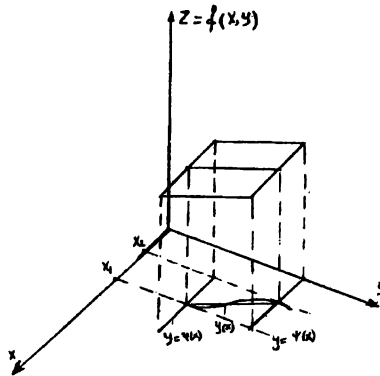


Рис. 14. Пояснение к функционалу (2-15)

$$y da dS = y \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx da.$$

Физически минимум функционала

$$I = \int_0^{2\pi} da \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) y \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) y \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx$$

означает определение такой кривой $y(x)$, для которой вес площади поверхности вращения минимален.

2.5. Обобщенная задача Лагранжа и задача с ограничениями в вариационном исчислении

27

В практике встречаются задачи на отыскание экстремума функционала при дополнительных условиях, наложенных на функции, в классе которых ищется экстремум. Эти задачи называют задачами на условный экстремум. Их примером может служить задача о нахождении кратчайшего расстояния между двумя точками при условии, что кривая, соединяющая эти две точки, лежит на некоторой поверхности, например на сфере. Решение сводится к определению минимума функционала:

$$I=S=\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2+z'^2} dx \quad (2-19)$$

28

при условии:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0. \quad (2-20)$$

Для решения таких задач используется метод неопределенных множителей Лагранжа.

Теорема: для того чтобы найти экстремум функционала

$$I=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', z, z') dx \quad (2-21)$$

при условии

$$\Psi(x, y, z)=0, \quad (2-22)$$

необходимо ввести вспомогательную функцию:

$$\Phi = F + \lambda(x)\Psi,$$

где $\lambda(x)$ пока неизвестная функция (неопределенный множитель Лагранжа), и искать обычными методами экстремум функционала:

$$I=\int_{x_0}^{x_1} \Phi dx. \quad (2-23)$$

В задаче требуется определить три неизвестные функции $y(x)$, $z(x)$, $\lambda(x)$, удовлетворяющие трем уравнениям: двум уравнениям Эйлера для функционала (2-22):

$$\Phi_y - d\Phi_{y'}/dx = F_y - dF_{y'}/dx + \Psi_y \lambda(x) = 0,$$

$$\Phi_z - d\Phi_{z'}/dx = F_z - dF_{z'}/dx + \Psi_z \lambda(x) = 0$$

и одному уравнению связи:

$$\Psi(x, y, z) = 0.$$

Кроме того, должны выполняться условия трансверсальности, при этом роль функции F будет играть функция:

$$\Phi = F + \Psi \lambda.$$

Примером **задачи на условный экстремум** является изопериметрическая задача, которая получила такое название из-за частной задачи определения среди всех кривых равной длины (изопериметрических) одной кривой, ограничивающей максимальную площадь. Здесь экстремум функционала:

$$I_0 = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

определяется при ограничивающем условии в виде интеграла:

$$I_1 = \int_{x_0}^{x_1} K(x, y, y') dx = \text{const.}$$

Данная задача сводится к обобщенной задаче Лагранжа введением функции:

$$\Phi = \lambda_0 F + K \lambda_1,$$

после чего решается задача на экстремум функционала:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \Phi dx$$

уже без исходного ограничения. В изопериметрической задаче осуществляется принцип взаимности – экстремали задачи $I_0 \rightarrow \min$, $I_1 = \text{const}$ совпадают с экстремалими задачи $I_1 \rightarrow \min$, $I_0 = \text{const}$, т.к. уравнение Эйлера для этих задач одно и то же – оно соответствует функции Φ .

Правило неопределенных множителей Лагранжа сохраняется и тогда, когда ограничивающее условие содержит производные. В этом случае экстремальная задача называется **задачей Лагранжа**.

К задаче Лагранжа сводятся почти все частные задачи вариационного исчисления. Так, при зависимости функционала от высших производных задача также решается методом Лагранжа. Действительно, если имеется функционал:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'') dx,$$

то можно ввести новую функцию $y' = z$, $y'' = z'$, тогда решение сведется к отысканию экстремума функционала:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', z'') dx,$$

при условии

$$y' - z = 0.$$

На практике для достижения оптимального управления (которое рассматривается в следующей главе) часто приходится отыскивать экстремум функционала при ограничениях, наложенных на класс сравниваемых функций. Дело в том, что, например, мощности исполнительных устройств систем управления, как правило, ограничены. Математически это означает, что для сравнения допускаются функции y_i , удовлетворяющие неравенству:

$$\Psi_i(x, y, y_i') \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Такие задачи удается решать на уровне инженерной строгости введением односторонних вариаций и дополнительным усложнением функционалов. При этом задача, естественно, усложняется. Для примера будет рассмотрен простейший случай (вполне достаточный, с методической точки зрения), когда заданы функционал вида:

$$I = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (2-24)$$

и ограничивающее условие:

$$\Psi(x) \leq y(x).$$

Кривая $y = \Psi(x)$ определяет границу области, внутри или вне которой должна находиться функция, доставляющая экстремум функционалу (рис. 15). **Области**, в которые включается граница, называются **замкнутыми**. Основная трудность в решении таких задач состоит в следующем. Для замкнутой области кривую $y = \Psi(x)$ можно сравнивать только с кривой $y + \delta y$, так как, если $y(x)$ проходит по границе [$y = \Psi(x)$], то кривая $y + \delta y$ ($\delta y > 0$) уже выходит за пределы допустимой области, т. е. на границе допустима только односторонняя вариация. При выводе же основного уравнения Эйлера использовались вариации обоих знаков $y + \delta y$ и $y - \delta y$ ($\delta y > 0$) и значения функционала на экстремали $y(x)$ сравнивались с его значениями для обеих допустимых функций $y + \delta y$ и $y - \delta y$. Для того чтобы устранить это несоответствие, заменяют переменные: вместо y вводят z , пользуясь уравнением:

$$z^2 = y - \Psi(x),$$

из которого следует, что

$$2zz' = y' - \Psi(x)$$

или

$$y' = 2zz' + \Psi(x).$$

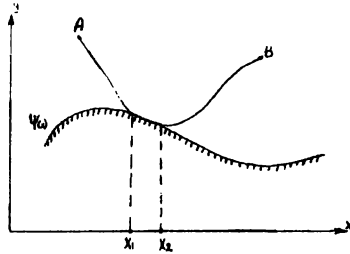


Рис. 15. К задаче с ограничениями

Поэтому функционал (2-24) в новых переменных может быть записан в виде:

$$I = \int_a^b F[x, z^2 + \Psi(x), 2zz' + \Psi(x)] dx. \quad (2-25)$$

На новую функцию $z(x)$ не наложено никаких ограничений, просто на границе области она принимает значение $z = 0$, и экстремум функционала (2-25) можно искать обычным методом, придавая двусторонние вариации. В результате получится уравнение Эйлера для функции:

$$F_z - d F_z / dx = 0. \quad (2-26)$$

Уравнение Эйлера (2-26) может быть переписано в виде:

$$F_z - d F_z / dx = 2z F_y - 2z d F_y / dx = 0$$

или

$$2z(F_y - d F_y / dx) = 0. \quad (2-27)$$

Уравнение (2-27) распадается на два: $z = 0$, которое совпадает с уравнением $y = \Psi(x)$, и уравнение Эйлера

$$F_y - d F_y / dx = 0.$$

Из этих двух уравнений следует, что экстремум при наличии ограничений может достигаться лишь на кривых, составленных из кусков экстремалей и кусков границы допустимой области.

Для полного решения задачи с ограничениями необходимо найти условия перехода экстремали к границе области и наоборот, но данная задача выходит за границы данного курса.

2.6. Каноническая форма уравнений Эйлера и прямые методы в вариационном исчислении

Симметричная или каноническая форма дифференциальных уравнений Эйлера основана на вариационной механике Гамильтона - Лагранжа. Введем вместо y' новую переменную:

$$p = F_{y'}, \quad (2-28)$$

из нее можно выразить $y' = \Phi(x, y, p)$. Поэтому, если ввести функцию, называемую гамильтонианом:

$$H(x, y, p) = -F(x, y, y') + y' F_{y'}(x, y, y'),$$

где $y' = \Phi(x, y, p)$, т.е.:

$$H(x, y, p) = -F(x, y, \Phi(x, y, p)) + p \Phi(x, y, p),$$

то прямым дифференцированием можно получить следующие уравнения:

$$\partial H / \partial y = p \partial y' / \partial y - F_{y'} - F_{y'} \partial y' / \partial y \quad (2-29)$$

$$\partial H / \partial p = -F_{y'} \partial \Phi / \partial p + \Phi + p \partial \Phi / \partial p. \quad (2-30)$$

Подставив в уравнение Эйлера

$$F_{y'} - dF_{y'}/dx = 0$$

формулу (2-28), получим:

$$F_{y'} = dp/dx.$$

С учетом последнего соотношения и формулы (2-28) уравнения (2-29) и (2-30) примут вид:

$$-\partial H / \partial y = dp/dx, \quad (2-31)$$

$$\partial H / \partial p = dy/dx. \quad (2-32)$$

30.

Это - гамильтонова форма уравнений Эйлера, представляющая собой связанную пару дифференциальных уравнений в частных производных. Иначе их называют **канонической формой уравнений Эйлера** или уравнениями Гамильтона.

Этот метод целиком заимствован из классической механики.

Состояние любой физической механической системы характеризуется в определенный момент времени t координатами q и их производными q' или импульсами P , поэтому состояние системы в момент времени t может быть представлено точкой в фазовом пространстве $2n$ измерений, по осям координат которого отложены p_i и q_i .

В механике есть принцип наименьшего действия или **принцип Гамильтона**,

который формулируется следующим образом: переход системы из одного состояния в другое состояние происходит по такой траектории в фазовом пространстве, на которой некоторый интегральный функционал, называемый действием, обращается в минимум (точнее, траектория системы является экстремалью этого функционала). Функционал-действие выбирается таким образом, что уравнение Эйлера для него совпадает с уравнением движения, соответствующим законам Ньютона.

В большинстве практических задач уравнение Эйлера - Лагранжа не интегрируется. Поэтому большое распространение получили так называемые прямые методы, которые дают приближенное решение задачи.

Идея **прямых методов** заключается в следующем. Пусть требуется найти функцию $y(x)$, доставляющую экстремум функционалу $I(y)$. Построим последовательность функций $y_1, y_2, \dots, y_n$, которая сходится к функции y , т. е.:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n) = y.$$

и докажем, что при этом функционал также стремится к некоторому пределу:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (I(y_n)) = I(y).$$

Существует много прямых методов. Из них наиболее известны методы Рунге и Эйлера, для которых с помощью сложных математических рассуждений доказывается, при каких условиях обеспечивается сходимость последовательности функций к экстремали.

Здесь будет рассмотрен **метод Рунге**.

Допустим, требуется найти минимум функционала

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

при граничных условиях:

$$y(x_0) = A; \quad y(x_1) = B. \quad (2-33)$$

Введем в рассмотрение функции:

$$y(x_i) = \Phi_0(x) + \sum_{j=1}^n c_j \Phi_j(x), \quad (2-34)$$

где:

$$\Phi_0(x_0) = A; \quad \Phi_0(x_1) = B;$$

$$\Phi_j(x_0) = \Phi_j(x_1) = 0.$$

Функции Φ_j линейно-независимые и называются координатными (базисными), для них тождество:

$$c_0 \Phi_0 + c_1 \Phi_1 + \dots + c_n \Phi_n \equiv 0$$

выполняется только при $c_j = 0, j = 1, \dots, n$. Если подставить выражение (2-34) в (2-33), то функционал превратится в функцию n переменных:

$$I\{y_n(x)\} = Q(c_1, c_2, \dots, c_n).$$

Требуется определить значения c_j , которые обращают в минимум функцию Q , т. е. задача сводится к решению n алгебраических уравнений:

$$\partial Q / \partial c_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2-35)$$

Во многих случаях найденные таким образом функции $y_j(x)$ сходятся к экстремали.

Пример. Минимизируем функционал:

$$I = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2xy); \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Для этого выберем координатные функции Φ_j в виде:

$$\Phi_0(x) = 0; \quad \Phi_1(x) = x^2 - x;$$

$$\Phi_2(x) = x^3 - x^2, \dots, \Phi_n(x) = x^{n+1} - x^n,$$

при $n=2$ получим:

$$y_2(x) = c_1(x^2 - x) + c_2(x^3 - x^2);$$

$$y'_2(x) = c_1(2x - 1) + c_2(3x^2 - 2x);$$

$$I\{y_2(x)\} = Q(c_1, c_2) = (11/30)c_1^2 + (11/30)c_1c_2 + c_2^2/7 - c_1/6 - c_2/10.$$

Тогда уравнения для определения значений коэффициентов c_1, c_2 запишутся как:

$$(11/15)c_1 + (11/30)c_2 = 1/6;$$

$$(11/30)c_1 + (2/7)c_2 = 1/10.$$

Откуда:

$$c_1 = 69/473; \quad c_2 = 7/43;$$

$$y_2(x) = (77x^3 - 8x^2 - 69x)/473.$$

Точное решение в данном случае имеет вид:

$$y = \{ [e(e^x - e^{-x})] / (e^x - 1) \} - x.$$

В таблице дается сравнение точного и приближенного решений задачи.

Таблица 1

X	y	$y_2(x)$	x	y	$y_2(x)$
0,0	0,0000	0,0000	0,6	- 0,0583	- 0,0585
0,2	- 0,0287	- 0,0285	0,8	- 0,0444	- 0,0442
0,4	-0,0505	- 0,0506	1,0	0,0000	- 0,0000

3. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И ПРИНЦИП МАКСИМУМА

3.1. Развитие теории управления

32 Зарождение теории управления (теории регулирования) обычно принято датировать сороковыми годами XIX в., когда независимо друг от друга появились две работы, посвященные одной и той же проблеме, - проблеме выбора параметров регулятора Уатта. Автором одной из них был английский физик Максвелл, а другой - наш соотечественник, инженер И. А. Вышнеградский. Обе эти работы были посвящены созданию научных основ регулирования работы паровой машины, т.е. принципов, позволяющих обеспечить постоянство оборотов вала при изменяющейся внешней нагрузке. Большое влияние на развитие идей и методов теории регулирования оказала теории устойчивости А. М. Ляпунова.

Рассмотрим связь задач теории регулирования с основными проблемами теории устойчивости. Пусть необходимо целенаправленное изменение какого-либо физического процесса, влиять на ход которого можно путем изменения тех или иных конструктивных параметров. В качестве примера будем рассматривать конструкцию автопилота - прибора, который изменением положения рулей может изменять характер полета самолета. Пилоту задается место и время прибытия и рассчитанный курс полета. Пилот выводит самолет на расчетный курс и включает автомат. Движение самолета будет описываться некоторой системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x, t, p, \xi). \quad (3-1)$$

Здесь:

x - вектор, описывающий фазовое состояние системы (координаты и скорость самолета);

t - время;

ξ - случайный вектор, характеризующий внешние воздействия;

p - вектор конструктивных параметров автопилота, которые могут выбираться в данном случае конструктором.

Зная расчетную траекторию самолета, всегда можно выбрать начало отсчета таким образом, чтобы при отсутствии внешних возмущений значения фазовых переменных были нулевые. Следовательно, точка $x = 0$ должна удовлетворять уравнению

$$f(0, t, p, 0) = 0. \quad (3-2)$$

Пусть в некоторый момент $t = t_0$ на движение самолета оказало воздействие некоторое случайное возмущение (например, ветер), в результате которого состояние системы изменилось:

$$x(t_0) = x_0 \neq 0. \quad (3-3)$$

Каким условиям должно удовлетворять движение самолета, чтобы, несмотря на отклонение (3-3), он достиг заданной цели? Прежде всего, очевидно, что значения компонент вектор-функции $x(t)$, характеризующих положение самолета по отношению к расчетной траектории, не могут увеличиваться (по абсолютной величине). Так как траектория самолета должна пройти через цель управления, то необходимо, чтобы возникшее вследствие каких-то причин отклонение параметров полета самолета от расчетных значений со временем могло исчезнуть. Для обеспечения этих условий полета достаточно, чтобы движение самолета обладало асимптотической устойчивостью, т.е. должно выполняться условие:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (3-4)$$

Условие (3-4) не является строго необходимым или строго достаточным. Достижение цели управления должно произойти за конечное время T , а условие (3-4) описывает асимптотические свойства движения при $t \rightarrow \infty$. Возможность такой замены конечного отрезка времени бесконечным означает только одно - время полета самолета является "практически" бесконечно большим по сравнению со временем, необходимым для компенсации возмущения (затухания колебаний самолета). Таким образом, хотя возможность использования условия (3-4) является опытным фактом, она открывает разнообразные пути количественного анализа. Замена большого, но конечного отрезка времени бесконечным является широко распространенным приемом, так как исследование на бесконечном интервале времени иногда оказывается более простым, чем исследование поведения функций на конечном интервале.

Проблема исследования устойчивости тривиального решения ($x = 0$) системы (3-1) - это основная задача теории устойчивости, одной из важнейших глав теории дифференциальных уравнений. Но задача проектирования автопилота, обеспечивающего асимптотическую устойчивость движения самолета, не сводится только к задаче теории устойчивости. Как правило, недостаточно выяснить, устойчив ли полет самолета с данным автопилотом. Необходимо определять допустимые интервалы изменения параметров автопилота (компонент вектора p), обеспечивающие устойчивость.

Условия устойчивости можно представить различным образом, и вопрос об их выборе носит субъективный характер. Именно соображения удобства, наглядности побуждали инженеров искать все новые и новые формы представления условий устойчивости. Условия устойчивости, записанные в той или иной форме, определяют в пространстве параметров некоторое множество G_p . Выбор $p \in G_p$ гарантирует выполнение условия устойчивости (3-4), что, в свою очередь, гарантирует достижение цели управления. Но условие устойчивости не единственное, которому должны удовлетворять параметры регулятора. В основе получения этого условия всегда лежит конкретная конструкторская схема - некоторая структура. Так, в работах Максвелла и Вышнеградского изучались вопросы устойчивости поддержания заданного числа оборотов двигателя с помощью вполне конкретного устройства - регулятора Уатта. Изучая способы управления некоторым процессом, необходимо решать сразу две задачи:

- выбор принципиальной схемы регулятора (автопилота или какого-либо другого механизма);

- выбор параметров прибора, обеспечивающих достижение целей управления.

Первая задача всегда носит характер изобретательства. Хотя существует целый ряд исследований, в процессе которых были выработаны разнообразные рекомендации о выборе структуры механизмов управления, тем не менее, в конечном итоге, вопрос о конструктивной схеме механизма остается вопросом конструкторским, а оценка совершенства прибора включает и оценку таких показателей, как простота, технологичность, надежность. Таким образом, конструктивная схема накладывает на выбор параметров p вполне определенные ограничения:

$$p \in G_2. \quad (3-5)$$

Следовательно, для достижения целей управления (выполнения условий 3-4) необходимо, чтобы:

$$p \in G = G_1 \cap G_2. \quad (3-6)$$

Если множество G пусто, то это означает, что выбранная конструкция (система управления) не обеспечивает цели управления и должна быть заменена.

Критерий достижения цели управления (3-4) может быть сформулирован и в терминах оптимизации. Для этого достаточно ввести новый критерий, например:

$$\begin{aligned} l(p) &= 1, \text{ если } \lim_{t \rightarrow \infty} x(f) = 0, \\ l(p) &= 0, \text{ если } \lim_{t \rightarrow \infty} x(f) \neq 0, \end{aligned} \quad (3-7)$$

или, в эквивалентной форме (см. 3-6),

$$\begin{aligned} l(p) &= 1, \text{ если } p \in G, \\ l(p) &= 0, \text{ если } p \notin G. \end{aligned} \quad (3-8)$$

Теперь условие (3-5) или (3-6) можно представить в виде:

$$l(p) \rightarrow \max, \quad (3-9)$$

и любое решение оптимизационной задачи (3.9) является решением исходной задачи.

Условия (3-4) и (3-9) не выделяют единственного решения задачи. По существу, они определяют целое множество параметров G - целый класс допустимых конструкций, обеспечивающих достижение цели управления. Поэтому в распоряжении конструктора еще остается возможность уточнения вектора p , возможность подчинить его каким-либо дополнительным условиям, что эквивалентно дополнительной оптимизации, но уже не на множестве G_2 , а на множестве G .

В 40 – 50 гг. произошло качественное расширение проблем, которыми занималась теория регулирования. В результате этого процесса постепенно практически исчез и сам термин "теория регулирования", и вместо него стали использовать термин "теория управления".

Такое расширение круга изучаемых задач было связано прежде всего с нуждами возникшей ракетной техники. До войны теория регулирования изучала,

как правило, процессы, развивающиеся на большом интервале времени. Именно поэтому методы классической теории устойчивости, оперирующей с асимптотическими свойствами решений (при $t \rightarrow \infty$), оказались удобными при исследовании реальных задач - время полета самолета было на много порядков больше времени компенсации его отдельных колебательных движений. В теории регулирования возник термин "**переходной процесс**" - процесс возвращения системы к исходному стационарному режиму после окончания действия случайного возмущающего фактора.

Оперируя преимущественно со стационарными режимами, теория регулирования изучала переходные процессы главным образом в связи с изучением качества управления. Потребности же ракетной техники привели к совершенно иным задачам, поскольку движение ракеты было, как правило, кратковременным и могло рассматриваться как единый переходной процесс. Но было и еще одно обстоятельство, которое потребовало новых постановок задач, - это стоимость горючего, необходимого для движения ракеты. Отношение затрат топлива, необходимого для доставки полезного груза, к количеству этого груза обычно столь велико, что проблема расчета траектории, обеспечивающей достижение цели управления с минимальными затратами топлива, сделалась уже в середине сороковых годов одной из самых актуальных задач математической теории движения ракет. К этой проблеме было привлечено внимание большого количества математиков и инженеров, и в результате возникла новая научная дисциплина - теория оптимального управления.

В теории регулирования занимались изучением способов управления стационарными движениями на бесконечном интервале времени. Задачи динамики ракет - это существенно нестационарные задачи. Время протекания процесса управления в них часто бывает очень малым. Например, время горения порохового заряда первых боевых ракет исчислялось секундами или долями секунд, и в течение этих секунд развивался весь процесс управления. Естественно, что все традиционные постановки задач теории регулирования не соответствовали новой реальности. Поэтому проблема динамики управляемого полета ракет вначале развивалась вне теории регулирования. Слияние этого направления с теорией регулирования, которое и привело к созданию теории управления, произошло уже позднее - в пятидесятые годы.

Расчет ракетных траекторий превратился в развитое направление складывающейся теории управления. Такие задачи носили, как правило, вариационный характер. Это были прежде всего задачи на быстроедействие.

Вариационные задачи, которые возникли в динамике ракет и теории регулирования, обладали одной важной особенностью, которая не позволяла сводить их к классическим задачам вариационного исчисления и применять затем развитые методы математического анализа. Хотя классические задачи вариационного исчисления легко сформулировать в терминах теории управления, трудность была в другом. Вариационное исчисление, если использовать язык теории управления, оперировало с управляющими функциями $u(t)$, на которые либо не накладывалось никаких ограничений, либо их допустимые множества были открытыми. В ракетной динамике и теории регулирования возникала качественно новая проблема - управления $u(t)$, как правило, должны были принадлежать замкнутым множествам, что отражало естественные технические требования. Тяга двигателя, угол поворота руля и пределы изменения других управляющих органов всегда принципиально ограничены. Эта особенность исключала возможность непосредственного использования хорошо развитых методов вариационного исчисления и требовала создания некоторого специального аппарата. Несмотря на то, что к началу пятидесятых годов целый ряд конкретных задач такого типа был уже решен, еще не был выработан единообразный подход к их анализу. Для каждой задачи развивался собственный

метод. Тем не менее, можно считать, что уже в начале пятидесятых годов стала возникать новая теория, которая позднее получила название теории оптимального управления.

3.2. Принцип максимума Понтрягина для задач с непрерывным временем

Выдающаяся роль в развитии теории оптимального управления принадлежит Л. С. Понтрягину, который сформулировал принцип максимума, позволяющий с помощью множителей Лагранжа свести задачу оптимального управления к некоторой специальной задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. После работ Л. С. Понтрягина и его школы в теории управления произошла определенная канонизация языка и методов, и благодаря этим работам окончательно оформилась современная теория управления. На базе общего языка и общего формализма произошло объединение теории регулирования с другими направлениями, которые занимались изучением задач управления.

Управляемые системы можно трактовать как естественное развитие динамических систем, свойства которых считаются известными из теории дифференциальных уравнений.

Ограничимся рассмотрением систем, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = f(x, u, t, \xi). \quad (3-10)$$

Здесь:

x - n -мерный фазовый вектор;

ξ - k -мерный ($k \leq n$) вектор возмущений (внешних воздействий), который может быть случайным либо неопределенным;

$u(t)$ - вектор-функция размерности $m \leq n$ носит название управления или управляющего вектора.

Это "свободная" вектор-функция. С системой управления ассоциирован некоторый субъект, способный и имеющий право принимать решения, т. е. выбирать управляющую функцию, которая может быть функцией:

- времени ($u = u(t)$);

- фазового вектора ($u = u(x)$);

- возмущения ($u = u(\xi)$);

- иметь более общий вид ($u = u(t, x, \xi)$).

Вектор $x(t)$ задается своей принадлежностью к некоторому множеству:

$$\xi(t) \in G_{\xi}(t) \quad \forall t. \quad (3-11)$$

"Субъект" - это оперирующая сторона или исследователь. В теории управления, которая имеет дело и с техническими системами, с этим термином связывают также и конструктора, который проектирует систему управления.

Во всех тех случаях, когда вектор управления является функцией фазовых переменных и возмущений, предполагается, что эти величины известны или становятся известными субъекту к моменту принятия решения. Это предположение, в свою очередь, требует описания некоторого информационного процесса. Выбор величины u обычно стеснен какими-либо ограничениями в виде:

$$u \in G_u \quad \forall t, x, \xi, \quad (3-12)$$

где G_u — некоторое множество произвольного вида.

На изменение фазовых координат также могут быть наложены ограничения, например, такие:

$$x \in G_x \quad \forall t. \quad (3-13)$$

Иногда условия (3-12) и (3-13) нужно объединять:

$$(t, x, u) \in G_{xu} \quad \forall t, \quad (3-14)$$

или

$$(t, x, u, \xi) \in G \quad \forall t. \quad (3-15)$$

Условие (3-13) называется фазовым ограничением, условия (3-14) и (3-15) - смешанными ограничениями. Условия смешанного типа часто называются ограничениями типа узких мест. Этот термин пришел из экономики; например, выпуск продукта не может превосходить мощности предприятия, которая, в свою очередь, зависит от управляющих воздействий - использования части продукта на инвестиции.

Системы уравнений вида (3-10), к которым добавлены ограничения (множества) - G_x, G_u, G_x , будем называть управляемыми системами.

Управляемые системы создаются для достижения тех или иных целей:

- самолет, чтобы перевозить людей или грузы;
- ракета - для вывода космического аппарата на заданную орбиту;
- система управления фирмой - для обеспечения людей товарами и т. д.

Цель управления - это субъективное представление лица, ответственного за выбор управлений (субъекта системы), о тех мотивах, которыми следует руководствоваться при выборе свободной функции u .

Функция $u(t, x, \xi)$ после того, как мы ее выбрали, является формализованным описанием способов достижения цели. В теории управления эта функция часто называется законом управления. Таким образом, одна из основных задач теории управления - отыскание закона управления по заданной цели.

Цель управления можно сформулировать в терминах минимизации некоторого функционала:

$$J(u) = \int_0^T F(x, u, t) dt \rightarrow \min, \quad (3-16)$$

при условиях:

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad (3-17)$$

$$(x, u) \in G. \quad (3-18)$$

Тогда задача (3-16) - (3-18) будет называться задачей оптимального управления.

Теперь можно перейти к рассмотрению принципа максимума Понтрягина. Введем систему:

$$\dot{\varphi} = - \frac{\partial H}{\partial x} = \varphi(x, \varphi, u, t), \quad (3-19)$$

которая сопряжена с системой (3-17).
 В (3-19) H -- это функция Гамильтона (см. п.2.6.).
 При

$$u(t) \in G \quad \forall t \quad (3-20)$$

справедлива следующая теорема (**принцип максимума Понтрягина**).
Для того, чтобы функция $u(t)$ доставляла минимум функционалу (3-16) при условиях (3-17) и (3-21), необходимо, чтобы она доставляла максимум функции Гамильтона, т. е., чтобы она была решением задачи:

$$H(x, \Phi, u, t) \rightarrow \max. \quad (3-21)$$

Пример.

Задача максимального быстродействия для линейной системы описывается уравнениями:

$$\partial x_1 / dt = x_2 \text{ и } \partial x_2 / dt = u.$$

Нужно определить управление $u(t)$, которое обеспечивает быстрейший переход системы из состояния $x_1 = x_1^0$; $x_2 = x_2^0$ в состояние $x_1 = 0$; $x_2 = 0$ при условии $|u| \leq 1$.

Функция Понтрягина будет иметь вид:

$$H = \Phi_1 x_2 + \Phi_2 u.$$

Оптимальное управление соответствует максимуму H , который достигается на кусочно-непрерывной кривой, состоящей из отрезков $u = 1$, $u = -1$ и вертикальных отрезков. Это соответствует $u = 1$ при $\Phi_2 > 0$ и $u = -1$ при $\Phi_2 < 0$.

Для определения вспомогательных функций напомним уравнения:

$$d\Phi_1 / dt = -\partial H / \partial x_1 = 0;$$

$$d\Phi_2 / dt = -\partial H / \partial x_2 = -\Phi_1,$$

откуда

$$\Phi_1 = C_1;$$

$$\Phi_2 = C_2 - C_1 t.$$

Следовательно:

$$u = \text{sign} (C_2 - C_1 t).$$

Управление один раз меняет знак (sign – ступенчатая функция, которая изменяет свои значения только в дискретной последовательности точек разрыва). Постоянные C_1 и C_2 определяются из начальных условий.

3.3. Динамическое программирование и принцип оптимальности

Динамическое программирование - метод оптимизации, основанный на принципе оптимальности Беллмана, применяется в двух не исключаящих друг друга направлениях. С одной стороны, с его помощью решают задачи, связанные с непрерывными процессами оптимального управления, и тогда он представляет собой один из приемов решения вариационных задач, наряду с принципом максимума Понтрягина. В методе динамического программирования органически присутствует способ численного решения непрерывных вариационных задач. Для решения дифференциального уравнения Эйлера или Понтрягина, как правило, приходится искать подходящий численный метод, а для численного решения непрерывных вариационных задач методом динамического программирования необходимо лишь заменить непрерывный процесс дискретным с соответствующим малым интервалом дискретности.

С другой стороны, динамическое программирование позволяет решать задачи, дискретные по самой своей природе, т. е. не преобразованные из соответствующих непрерывных задач. Эта особенность имеет важное значение для экономической кибернетики, которая имеет дело с дискретными процессами (например, с дискретным количеством продукции), оптимизации вычислительных алгоритмов, распределения потоков в сетях, на графах и т.п.

Кроме того, следует отметить такую важную область применения динамического программирования, как решение задач, сводимых к проблеме оптимального перебора. Динамическое программирование в этом случае выступает как некоторый оптимальный метод перебора вариантов.

Начнем изложение с решения методом динамического программирования непрерывных задач и сравним его с решением по классическому вариационному исчислению и принципу максимума.

В основе непрерывного и дискретного динамического программирования лежит **принцип оптимальности Беллмана**, который заключается в следующем - оптимальная траектория состоит из частей-траекторий, каждая из которых оптимизируется собственным критерием-функционалом для соответствующих конечных и начальных точек.

Допустим, требуется определить функцию $y\{x\}$, обращающую в минимум функционал:

$$I = \int_a^b F(x, y, y') dx,$$

при условии

$$y(a)=y_a; \quad y(b)=y_b$$

Рассмотрим в фазовом пространстве оптимальную траекторию y_a, y_b (рис. 16). Разделим ее на два участка, обозначенные цифрами 1 и 2. Будем для простоты пока считать, что y_b фиксирован. Принцип оптимальности утверждает, что если вся траектория оптимальна, то участок 2 тоже оптимален. Это значит, что если начальное состояние системы есть y_0 при $x = x_0$, то независимо от того, по какой траектории система пришла в эту точку, ее дальнейшее движение будет происходить по участку 2 (такая независимость последующего движения от предыстории является также характерной особенностью случайных марковских процессов без последействия).

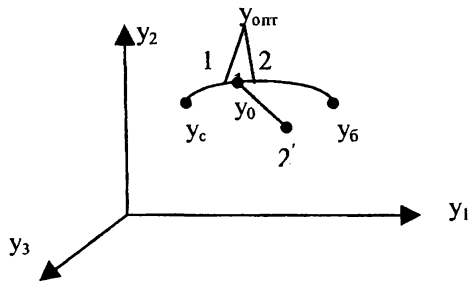


Рис. 16. К принципу оптимальности Беллмана

Если допустить, что участок 2 не является оптимальным, то существует другой участок 2' с началом в точке y_0 , на котором значение функционала будет меньше. Но тогда вместо начальной траектории 1-2 существует другая траектория 1-2', с меньшим значением функционала. Это противоречит исходному предположению о том, что траектория 1-2 оптимальна.

Утверждение о том, что любой участок оптимальной траектории есть оптимальная траектория, с некоторой точки зрения неверно. Действительно, если задана только начальная точка y_0 , то участок 1 траектории 1-2 может и не быть оптимальным.

Приведем пример. Пусть требуется оптимальным образом распределить темп бега спортсмена на дистанции от y_a до y_b так, чтобы он за минимальное время достиг точки y_b . Очевидно, что если дистанция достаточно большая, то тренер бегуна вряд ли даст ему указание бежать на каждом участке как можно быстрее. Бегун должен оптимальным образом составить свой график бега из расчета пробега всего пути в целом за минимальное время. Так, он может вначале бежать не в полную силу, чтобы обеспечить бурный финиш. Совсем другое дело, если бегуну зададут конечную точку y_0 и скажут, чтобы он наилучшим образом пробежал дистанцию 1, т.е. первый участок будет оптимален, когда помимо начальной точки y_a задана еще и конечная точка интервала y_0 . В связи с этим целесообразно напомнить, что обычная экстремаль представляет собой как бы единую цепь, каждое звено-участок которой является также экстремалью. По существу, с помощью принципа оптимальности класс экстремалей, на которых действительно может достигаться минимум, сужается за счет требования, чтобы конечный участок был оптимален.

Это требование определяет рамки применимости принципа оптимальности. Если оно несправедливо, то решать задачу с помощью динамического программирования нельзя.

Часто удается свести исходный процесс к новому путем увеличения числа измерений фазового пространства, и для такого процесса условие оптимальности будет выполняться. Принцип оптимальности справедлив и для дискретных, и для стохастических процессов управления, которые рассматриваются в отдельности. Условие оптимальности сразу позволяет получить основные уравнения метода динамического программирования - функциональное и дифференциальное уравнения Беллмана.

Для вывода **функционального уравнения Беллмана** вернемся к функционалу:

$$I = \int_a^b F(x, y, y') dx; \quad y(x) = c.$$

Минимум его зависит от a и c . Введем так называемую функцию Беллмана:

$$S(a, c) = \min_y \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad (3-22)$$

которая представляет собой минимальное значение функционала I при заданных a и c .

В силу аддитивности интеграла можем написать:

$$\int_a^b = \int_a^{a+\Delta} + \int_{a+\Delta}^b$$

и, применив принцип оптимальности, получим:

$$S(a, c) = \min_{y[a, a+\Delta]} \left[\int_a^{a+\Delta} F(x, y, y') dx + S(a + \Delta, c_1) \right], \quad (3-23)$$

где минимизация производится по всем $y(x)$, определенным на промежутке изменения $x = [a, a + \Delta]$, причем:

$$y(a) = c; \quad y(a + \Delta) = c_1.$$

Нетрудно убедиться, что функциональное уравнение Беллмана представляет собой формальную запись принципа оптимальности, состоящего в поэтапном определении оптимального управления. Вначале ищется минимум на конечном участке 2, затем на всей траектории 1-2.

Функциональное уравнение дает по существу рекуррентные соотношения для решения оптимальных задач численным методом на ЭВМ. Это уравнение позволяет получить дифференциальное уравнение Беллмана и все основные соотношения классического вариационного исчисления.

Если задано, что $y(a) = c$, то выбор функции $y(x)$ на интервале $[a, a + \Delta]$ эквивалентен выбору $y'(x)$ на интервале $[a, a + \Delta]$. Если Δ мало, а $y(x)$ непрерывна, то выбор $y'(x)$ на интервале $[a, a + \Delta]$ эквивалентен выбору $y'(a)$. Если отбросить члены малости выше первого порядка относительно Δ , то нетрудно убедиться в справедливости следующих соотношений:

$$\int_a^{a+\Delta} F(x, y, y') dx = F[a, c_1, y'(a)] \Delta; \quad (3-24)$$

$$c_1 = y(a) + y'(a) \Delta = c + y'(a) \Delta. \quad (3-25)$$

Вводя обозначение

$$v = y'(a)$$

и подставляя выражения (3-24) и (3-25) в функциональное уравнение (3-23), получаем:

$$S(a, c) = \min_v [F(a, c, v) \Delta + S(a + \Delta, c + v \Delta)].$$

Разложив функцию $S(a + \Delta, c + v \Delta)$ в ряд Тейлора:

$$S(a + \Delta, c + v \Delta) = S(a, c) + (\partial S / \partial a) \Delta + (\partial S / \partial c) v \Delta + \dots,$$

в пределе при $\Delta \rightarrow 0$ получим нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных:

$$-\partial S / \partial a = \min_v [F(a, c, v) + v \partial S / \partial c].$$

Это и есть **дифференциальное уравнение Беллмана**. Оно справедливо для любого значения $a = x$, поэтому его можно переписать в виде:

$$-\partial S / \partial x = \min_v [F(x, c, v) + v \partial S / \partial c].$$

Если ввести вместо x время t , c заменить на x и выделить координату управления u , которую необходимо определить оптимальным образом, то задача нахождения минимума функционала:

$$I = \int_t^T F(x, u, t) dt$$

сведется к решению уравнения:

$$-\partial S / \partial t = \min_u [F(x, u, t) + x' \partial S / \partial x].$$

Наконец, если имеется несколько координат и управлений (векторное управление), то задача минимума функционала сведется к решению следующего дифференциального уравнения:

$$-\partial S(x, t) / \partial t = \min_{u(t)} [F(x(t), u(t), t) + (\text{grad} S) dx/dt], \quad (3-26)$$

где

$$\text{grad } S = (\partial S / \partial x_1, \dots, \partial S / \partial x_n).$$

Если система описывается n дифференциальными уравнениями первого порядка:

$$dx_i/dt = f_i(x, u, t), \quad i = 1, \dots, n,$$

то уравнение (3-6) запишется в виде

$$-\partial S / \partial t = \min_u [F(x, u, t) + (\text{grad} S)f]. \quad (3-27)$$

Дифференциальное уравнение Беллмана является своеобразным нелинейным дифференциальным уравнением. В нем присутствует операция минимизации. В случае уравнения вида (3-27) минимум берется по u :

$$S = \min_u \int_t^T F(x, u, t) dt.$$

После того как сделан перебор по всем u и выбрано оптимальное управление, правая часть уравнения (3-27) не зависит от u . Важно отметить, что вывод уравнения (3-27) требовал существования частных производных от функции S по всем переменным t, x . Можно привести много примеров, где эта функция не является дифференцируемой, а оптимальное управление, как правило, существует. Например, на линиях переключения функция S всегда недифференцируема.

Рассмотрим следующий пример задачи оптимального управления:

$$dx_1/dt = x_2; \quad dx_2/dt = u.$$

Решив их при $u = \pm 1$, получим выражение для фазовых траекторий в виде

$$x_1 = \pm 1/2(x_2)^2 + C_1.$$

Линия переключения получается при $C_1 = 0$. Пусть начальная точка x_0 лежит выше линии переключения (рис.17) и имеет координаты (a, b) . Из условия прохождения параболы через эту точку находим:

$$C_1 = a + 1/2(b)^2.$$

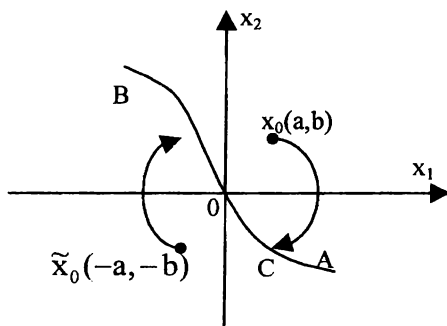


Рис. 17. Фазовые траектории и линия переключения

Уравнение самой параболы имеет вид:

$$x_1 = -1/2(x_2)^2 + a + 1/2(b)^2.$$

(3-28)

т. Кнут отсутствует
программ-я
имов.

Для определения точки переключения C необходимо решить совместно уравнение (3-28) и уравнение линии переключения:

$$x_1 = -1/2(x_2)^2. \quad (3-29)$$

Вычитая уравнение (3-29) из (3-28), получаем:

$$x_2 = a + 1/2(b)^2$$

или

$$x_2 = \pm \sqrt{a + 1/2(b)^2}.$$

Для точки C надо взять знак минус, тогда:

$$x_{2c} = -\sqrt{a + 1/2(b)^2}.$$

При движении от точки x_0 до точки C $u = -1$, поэтому $x_2' = -1$. Интегрируя это уравнение, получаем:

$$x_{2c} - b = \int_{t_0}^a x_2' dt = \int_{t_0}^a (-1) dt = t_0 - a, \quad (3-30)$$

где a - момент переключения. Аналогично при движении от точки C до начала координат $u = 1$, $x_2' = 1$ и

$$0 - x_{2c} = -x_{2c} = \int_a^{t_1} x_2' dt = \int_a^{t_1} dt = t_1 - a. \quad (3-31)$$

Вычитая из уравнения (3-31) уравнение (3-30), получаем:

$$b - 2 x_{2c} = t_1 - t_0.$$

Это - минимальное время движения по оптимальной траектории:

$$S(x_0) = b - 2 x_{2c} = b + 2 \sqrt{a + 1/2(b)^2}. \quad (3-32)$$

Так же можно вычислить эту функцию для случая, когда начальная точка лежит ниже линии переключения $\tilde{x}$ (рис. 17). Однако из геометрических соображений следует, что если поменять a на $-a$ и b на $-b$, то оптимальное время будет то же самое. Поэтому для случая, когда x_0 лежит ниже линии переключения, траектория:

$$S(\tilde{x}_0) = -b + 2 \sqrt{-a + 1/2(b)^2}. \quad (3-33)$$

Для x_0 , лежащих на линии переключения (ниже начала координат):

$$a = 1/2b^2 > 0, \quad b < 0;$$

$$S(x_0) = b + 2 \sqrt{b^2} = b + 2|b| = -|b| + 2|b| = +|b| = -b,$$

для точек x_0 , лежащих выше начала координат,

$$a = -1/2 b^2 > 0, \\ S(x_0) = -b,$$

т. е. функция S непрерывна везде и имеет вид:

$$\begin{aligned} S(x_0) &= b + 2\sqrt{a + 1/2(b)^2} && \text{при } x_1 \geq x_2/2; \\ S(x_0) &= -b && \text{при } x_1 = x_2/2; \\ S(x_0) &= -b + 2\sqrt{a + 1/2(b)^2} && \text{при } x_1 \leq x_2/2. \end{aligned}$$

Покажем, что хотя эта функция и непрерывна, у нее нет производных по x на линии переключения. Пусть точка C с координатами (a_0, b_0) (рис. 18) лежит на дуге AO так, что $a_0 = (b_0)^2/2 < 0$ и $b_0 < 0$:

$$\sqrt{a + 1/2(b)^2} = \sqrt{|b_0|^2} = |b_0| = -b_0.$$

Определим производные от функции S , задаваемой формулой (3-32):

$$\partial S / \partial a = 1 / \sqrt{a + 1/2(b)^2} \big|_c = -1 / b_0,$$

$$\partial S / \partial b = 1 + b / \sqrt{a + 1/2(b)^2} \big|_c = 1 + b_0 / -b_0 = 0.$$

Для формулы (3-13):

$$\partial S / \partial a = -1 / \sqrt{-a + 1/2(b)^2} = -\infty,$$

$$\partial S / \partial b = -1 + b / \sqrt{-a + 1/2(b)^2} = -\infty.$$

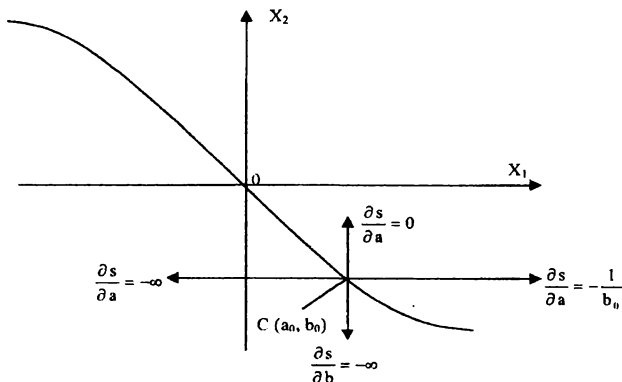


Рис. 18. Недефференцируемость функции на линии переключения

Как видим, при смещении из точки C вверх $\partial S / \partial b = 0$, при смещении вниз $\partial S / \partial b = -\infty$, т. е. производной $\partial S / \partial b$ в точке C не существует. Также не существует в точке C производной $\partial S / \partial a$.

Тем самым показано, что на линии переключения производных от S не существует. В остальных точках плоскости эта функция дифференцируема. Так как фазовая траектория обязательно содержит участок линии переключения, то для рассматриваемого случая нельзя написать дифференциальное уравнение Беллмана, если использовать рассмотренный ранее вывод этого уравнения.

Таким образом, в этой задаче оптимальная траектория, есть и она находится с помощью принципа максимума Понтрягина, но метод динамического программирования здесь не работает, т.к. не выполняется предположение о гладкости функции Беллмана.

3.4. Оптимизация дискретных процессов управления

Рассмотрим методы решения дискретных задач оптимизации с помощью динамического программирования и принципа максимума Понтрягина. Методы решения дискретных задач даются под общей идеей оптимизации дискретных процессов. Причем рассматривается только оптимизация дискретных во времени процессов, которые еще называются многошаговыми, многоэтапными или многоступенчатыми. Процессы, дискретные по величине (амплитуде), в которых переменные могут принимать только дискретные, квантованные (иногда целочисленные) значения, здесь не затрагиваются. Их оптимизации являются предметом рассмотрения целочисленного программирования (методы целочисленного программирования часто также называют дискретными).

Приведенные здесь методы могут применяться для оптимизации и непрерывных процессов управления, если их свести к многошаговой (дискретной) модели. Исходная система управления может, в некоторых случаях, менять свои состояния независимо от времени (не быть динамической), однако при оптимизации ее сводят к многошаговому динамическому процессу. Отсюда и возникло название динамического программирования.

Вначале на простейших примерах, ставших типовыми, рассмотрим основные идеи и особенности метода дискретного динамического программирования, затем дадим общую его теорию на основе общей модели многошаговых процессов, после чего изложим общую теорию дискретного принципа максимума и дадим пример решения с его помощью транспортной задачи.

Существуют два способа численного решения дифференциальных уравнений. В первом случае аппроксимируют точное дифференциальное уравнение, например, разностным уравнением, во втором случае представляют непрерывные решения дискретными точками и составляют точное (разностное) уравнение для дискретного процесса. Первый способ, в частности, применяется в численных методах для решения уравнений Эйлера и Понтрягина, второй типичен для динамического программирования и составляет его сущность. В принципе для динамического программирования не требуется составлять дифференциальное уравнение Беллмана. Непрерывная задача оптимального управления решается разбиением непрерывного процесса управления на дискретные этапы, т.е. вместо непрерывного рассматривают поэтапное управление путем поэтапного решения соответствующего функционального уравнения. На каждом этапе, начиная с конца, делают перебор оптимальных управлений из класса допустимых, т. е. удовлетворяющих ограничениям, и выбирают оптимальное, при этом необходимо учитывать, что исходный

непрерывный процесс управления должен допускать разбиение на этапы, для которых был бы применим принцип оптимальности Беллмана.

Если можно написать критерии оптимальности в виде интегрального функционала, то принцип оптимальности всегда применим в силу аддитивности функционала. Но дискретные процессы управления в принципе могут быть и такими, для которых критерии оптимальности нельзя представить в виде функционала, и тогда вопрос о справедливости принципа оптимальности требует специального рассмотрения.

Например, управление на каком-то этапе зависит от управления на l предыдущих этапах. В этом случае выполнения принципа оптимальности можно добиться увеличением размерности фазового пространства (добавлением координат). Рассмотрим общий путь решения непрерывной вариационной задачи методом дискретного динамического программирования.

Пусть требуется определить оптимальное управление, которое минимизирует функционал:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F(x, u, t) dt,$$

при условии

$$dx/dt = f(x, u, t);$$

$$x(t_0) = x_0.$$

Для этого заменим интеграл суммой, а дифференциальные уравнения разностными:

$$I_k(x) = \sum_{i=k}^{N-1} F(x^i, u^i, i \Delta) \Delta;$$

$$x^{i+1} = x^i + f(x^i, u^i, i \Delta) \Delta,$$

где

$$k \Delta = t_0, \quad N \Delta = t_1;$$

$$x^* = x^0$$

и обозначим

$$S_k(x^0) = \min_{\{x^i\}} I_k(x)$$

(в этой формуле минимум берется по всем интервалам длины Δ).
Применив принцип оптимальности, приходим к соотношению:

$$S_k(x^*) = \min \{ F(x^i, u^i, k \Delta) \Delta + S_{k+1}[x^* + f(x^*, u^*, k \Delta) \Delta] \},$$

которое позволяет на каждом k -м этапе выбирать оптимальное управление,

начиная с последнего ($N - 1$)-го этапа. После того как, начиная с конца, на каждом участке выбрано оптимальное управление, необходимо двигаться от начала в конец и получить непрерывную траекторию, состоящую из оптимальных кусков и соединяющую начальную и конечную точки.

3.5. Методы решения некоторых дискретных оптимизационных задач

3.5.1. Задача о кратчайшем пути

Определим кратчайший путь между пунктами A и B , соединенными сложной сетью дорог (рис. 19). Вдоль каждого участка дороги проставлено время движения с учетом покрытия дороги и рельефа местности. Для решения задачи разобьем все расстояние между A и B на этапы. Выбор оптимального пути начнем с конца. Найдем кратчайшие пути, соединяющие пункт B с каждой точкой пересечения линии $N - 1$.

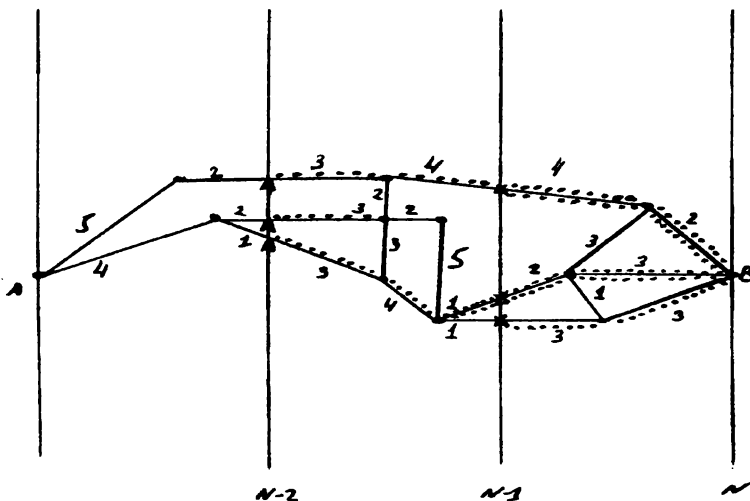


Рис. 19. Задача о кратчайшем пути

Таких оптимальных на последнем участке путей три, они отмечены точками снизу. Затем перейдем к следующему от конца участку, ограниченному прямыми $N - 2$ и $N - 1$. Отметив точки пересечения дорог с прямой $N - 2$ треугольниками, найдем такие пути, соединяющие эти точки с точками пересечения на прямой $N - 1$, которые дадут минимальный суммарный путь на участках ($N - 2$, $N - 1$) и ($N - 1$, N). Эти оптимальные пути отмечены точками сверху.

В качестве второй части пути рассматриваются только оптимальные пути, найденные на последнем участке.

Здесь по существу для следующего от начала участка используется функциональное уравнение:

$$S_{N-2} = \min [g_{N-2} + S_{N-1}].$$

После $N-2$ переходим к первому этапу (см. рис.19), который содержит

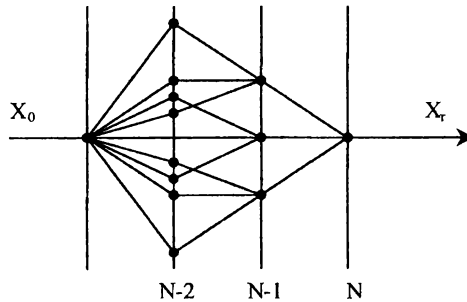


Рис. 20. Сведение непрерывной задачи к дискретной

начальный пункт A . Для этого этапа необходимо соединить A с точками пересечения дорог с прямой $N - 2$ и выбрать оптимальный путь от каждой из этих точек. Затем, делая перебор по этим оптимальным путям и оптимальным путям, соединяющим точки пересечения на прямой $N - 2$ с точкой B , а затем, сравнивая суммарное время движения по ним до точки A , выбираем наилучший.

Таким будет путь, время движения по которому равно 18, соединяющий A и B и проходящий через нижнюю точку пересечения прямой $N-2$ и среднюю точку пересечения $N-1$, причем перебираются не все пути, соединяющие точки пересечения на прямой $N - 2$ с точкой B , а только оптимальные, уже отобранные на предыдущем этапе расчета. В этом заключается выигрыш, который дает динамическое программирование. Реально этапов N может быть несколько сотен и даже тысяч. Может быть несколько путей с оптимальным (одинаковым) временем.

Существенное влияние на успех решения оказывает выбор длины этапа: если ее выбрать такой малой, что точки пересечения на двух соседних прямых соединятся одним путем, то никакого выигрыша метод динамического программирования как метод поэтапного перебора не даст по сравнению с прямым перебором.

При выборе слишком большой длины этапа очень много путей соединят каждую пару точек пересечения, и эти пути придется долго перебирать. Точных рекомендаций для выбора длины этапа нет. Можно только рекомендовать, чтобы путей, соединяющих две точки пересечения, было не менее 3-5, но не более 8 - 10. Тогда поэтапный перебор будет проще прямого.

На каждом этапе необходимо выполнить по два перебора:

- 1) для нахождения минимального пути, соединяющего две точки пересечения (перебор всех путей, их соединяющих);
- 2) для нахождения минимального суммарного пути, состоящего из оптимальных путей, соединяющих точки пересечения левой и правой прямых данного интервала, и оптимальных путей, соединяющих правые точки пересечения с конечной.

Большинство непрерывных задач оптимизации допускает интерпретацию в виде модели, представленной на рис. 20. В n -мерном фазовом пространстве (для простоты считаем $n = 2$) заданы две точки: начальная x_0 и конечная x_T . Требуется соединить их кривой, оптимальной в заданном смысле. Дискретной сети дорог нет, но задача допускает интерпретацию, аналогичную задаче с дорогами. На возможные пути наложены некоторые ограничения, например, по углу наклона траектории, идущей из заданной точки. Допустим, разрешается двигаться под углом, не выходящим из интервала ± 45 градусов к горизонтальному

направлению. Этот диапазон квантуют, т.е. разрешается двигаться не в любом, а в одном из 5-10 дискретных направлений внутри допустимого диапазона. Очевидно, что данная задача может решаться методом динамического программирования, так же как и в предыдущем случае.

3.5.2. Задача о критическом пути

Постановка задача следующая. Задается граф, называемый транспортной сетью, каждой дуге которого x_i, x_j (или x, y) соответствует некоторая величина — длина дуги $a(x_i, x_j) \geq 0$. Требуется найти кратчайший путь из истока x_0 в сток z . В качестве длины пути могут фигурировать длина дороги, количество бензина, расходуемое при движении по данному участку, стоимость проезда по данному участку и т. п.

Задача определения критического пути часто возникает в сетевом планировании и управлении. Любая сложная комплексная работа изображается в виде модели — сетевого графика, который представляет собой некоторую транспортную сеть. Начальная точка x_0 этой сети соответствует началу, конечная точка z — окончанию комплексных работ (рис. 21). Каждая отдельная (частная) работа комплекса показана на рисунке в виде дуги, начальная вершина которой соответствует началу работы, а конечная вершина — концу.

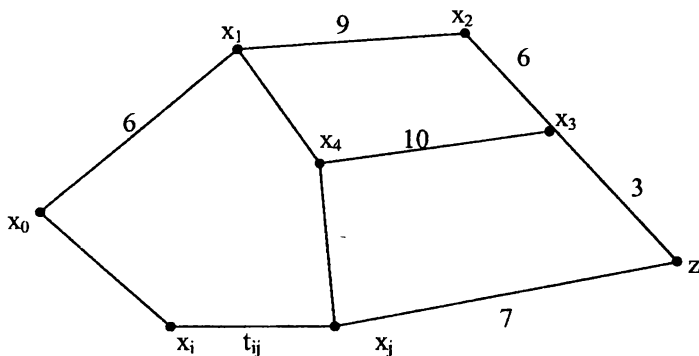


Рис. 21. Сетевой график

Каждой дуге (x_i, x_j) соответствует время выполнения работы t_{ij} , каждой вершине x_i — времени наступления данного события t_i [начала работы, изображенной дугой (x_i, x_j)]. На рис. 21 показан сетевой график, состоящий из восьми работ. Если комплекс работ состоит в постройке жилого дома, то отдельными работами могут быть рытье котлована, возведение фундамента, подводка коммуникаций, и т. д.

Цифры около каждой дуги означают время выполнения каждой работы (в днях). Требуется найти такой путь из начальной точки в конечную, вдоль которого суммарное время выполнения работ было бы максимальным. Он называется критическим. Критических путей может быть несколько. Тогда для сокращения времени выполнения комплекса работ необходимо уменьшить время выполнения работ, входящих в критические пути. Если ввести в рассмотрение еще и стоимости выполнения работ, то в данном критическом пути следует сокращать те работы, которые обладают наименьшим увеличением стоимости при сокращении времени выполнения работ, т. е., если обозначить зависимость стоимости

выполнения работы от времени через $c_{ij} = f_{ij}(t_{ij})$, то сокращать следует ту работу критического пути, для которой производная:

$$d [f_{ij}(t_{ij})] / d t_{ij}$$

будет максимальной. После сокращения времени одного критического пути может появиться другой критический путь.

Известно много алгоритмов для отыскания критического пути в сетевом графике. Здесь будет рассмотрен только алгоритм Беллмана - Калаба. Он основан на принципе оптимальности и использует функциональное уравнение Беллмана. **Принцип оптимальности** в данном случае можно сформулировать так - *любой максимальный (критический) путь, содержащий не более g дуг, образован частичными путями, содержащими не более k ($k \leq g$) дуг, которые (пути) также максимальны.*

Для всякой дуги, не принадлежащей нашей сети, т. е. $(x_i, x_j) \notin U$, положим $t_{ij} = 0$ и $t_{ji} = -\infty$. Тогда задача будет состоять в отыскании пути:

$$\gamma_{i=1} [E_1, E_{i1}, \dots, E_{ik}, E_n],$$

для которого сумма:

$$t_{i11} + t_{i12} + \dots + t_{ikn}$$

достигает максимума. Здесь E_j — события, соответствующие вершинам сети (моментам начала и окончания работ); t_{ij} — время выполнения работы, которая начинается событием E_j и заканчивается событием E_i .

Составим функциональное уравнение Беллмана:

$$v_i = \max (t_{ij} + v_j), \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

$$v_n = 0,$$

где величины v_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) являются критическими временами частичных путей от i -й до конечной вершины. Вычисления начнем с конца, полагая:

$$v_i^1 = t_{in} \quad i = 1, 2, \dots, n-1;$$

$$v_n^1 = t_{nn} = 0.$$

Далее, на втором шаге:

$$v_i^2 = \max (t_{ij} + v_j^1) \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3-34)$$

Величина v_i^1 содержит значения времени выполнения операции на путях, состоящих из одной дуги, которые заканчиваются в конечной вершине. Соотношения (3-34) позволяют выбрать максимальный путь, состоящий из двух дуг (которые заканчиваются в конечной точке). Дальнейшие вычисления выполним в соответствии с рекуррентной формулой:

$$v_i^k = \max (t_{ij} + v_j^{k-1}) \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad k > 1. \quad (3-35)$$

$$v_n^k = 0,$$

$$t_{ij} = 0.$$

Вычисления будут закончены, когда

$$v_i^k = v_i^{k-1} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Величины v_i^k составляют времена отдельных критических путей, входящих в общее время $t_{кр}$ критического пути.

Можно показать, что требуется всего $n - 2$ итерации вида (3-34), где n - число вершин сети. Величины v_i^k являются значениями функции Беллмана S для k -го этапа.

3.5.3. Задача распределения ресурсов

Рассмотрим типичную для динамического программирования задачу распределения ресурсов. Допустим, имеется в наличии u средств и четыре фирмы, в которые эти средства необходимо вложить оптимальным образом. Аналитически, графически или в виде таблиц должны быть заданы функции прибыли $g_i(y)$ - $g_4(y)$ в зависимости от вложений в каждую фирму. Зададим их с помощью табл. 2.

Таблица 2

Инвестиции y	$g_1(y)$	$g_2(y)$	$g_3(y)$	$g_4(y)$
0	0	0	0	0
1	0,20	0,15	0,10	0,22
2	0,25	0,30	0,30	0,40
3	0,40	0,45	0,55	0,50
4	0,60	0,60	0,70	0,60

Требуется оптимальным способом распределить исходные средства, чтобы суммарный доход:

$$I(y) = \sum_{k=1}^4 g_k(u_k); \quad \sum_{k=1}^4 u_k = y \quad (3-36)$$

был максимален. Для простоты предположим, что средства представлены целыми единицами (миллионами рублей). Это условие не является принципиальным для данной задачи и не означает, что задача становится целочисленной. Обозначим оптимальную прибыль при суммарном вложении y по одной фирме через $\Phi_1(y) = S_1(y)$, по двум - $\Phi_{12}(y) = S_2(y)$, по трем $\Phi_{123} = S_3(y)$, по четырем - $\Phi_{1234} = S_4(y)$.

Это и будут функции Беллмана для разных этапов. Оказывается, распределение ресурсов как процесс определения оптимального управления тоже можно разделить на этапы, хотя здесь нет никакого физического процесса во

времени. Условно вводится первый этап, называемый иногда нулевым, на котором все средства вкладываются в одну фирму, например в первую.

На втором этапе выбирается оптимальное распределение между двумя любыми фирмами, например между первой и второй, причем, так как результаты оптимального перебора на первом этапе согласно функциональному уравнению Беллмана будут использоваться на последующих этапах, то оптимальный перебор на втором этапе следует делать для разных значений исходного капитала y . В результате прохождения второго этапа составляется табл. 3 оптимальных распределений между первой и второй фирмами.

Таблица 3

Инвестиции y	$g_1(y)$	$g_2(y)$	$\Phi_{12}(y)$	Оптимальное распределение ресурсов (инвестиции в 1 и 2 фирмы)
0	0	0	0	(0,0)
1	0,20	0,15	0,20	(1,0)
2	0,35	0,30	0,35	(1,1)
3	0,40	0,45	0,50	(1,2)
4	0,60	0,55	0,65	(1,3)

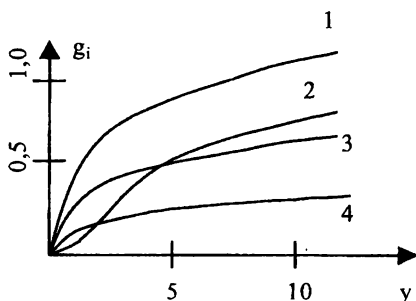


Рис. 22. Графики к задаче распределения ресурсов

Для определения необходимых прибылей используется таблица или соответствующие графики (рис. 22). После составления табл. 3 переходят к третьему этапу и определяют оптимальное распределение между первой, второй и третьей фирмами, используя результаты первого этапа. При этом составляется табл. 4 оптимальных распределений для разных значений исходного капитала. Наконец, переходят к последнему, четвертому этапу и составляют табл. 5 оптимальных распределений по четырем фирмам.

Таблица 4

Инвестиции y	$\Phi_{12}(y)$	$g_3(y)$	$\Phi_{123}(y)$	Ресурсы, распределенные по фирмам 1,2	Ресурсы, распределенные по фирмам 1,2,3
0	0	0	0	(0,0)	(0,0,0)
1	0,20	0,10	0,20	(1,0)	(1,0,0)
2	0,35	0,30	0,35	(1,1)	(1,1,0)
3	0,50	0,55	0,55	(1,2)	(0,0,3)
4	0,65	0,70	0,75	(1,3)	(1,0,3)

Таблица 5

Инвестиции y	$\Phi_{123}(y)$	$g_4(y)$	$\Phi_{1234}(y)$	Ресурсы, распределенные по фирмам 1,2,3	Ресурсы, распределенные по фирмам 1,2,3,4
0	0	0	0	(0,0,0)	(0,0,0,0)
1	0,20	0,22	0,22	(1,0,0)	(0,0,0,1)
2	0,35	0,40	0,42	(1,1,0)	(1,0,0,1)
3	0,55	0,50	0,60	(0,0,3)	(1,0,0,2)
4	0,60	0,60	0,77	(1,0,3)	(0,0,3,1)

Для составления таблиц использовались следующие формулы:

$$S_0(y) = g_1(y);$$

$$\Phi_{12}(y) = S_2(y) = \max [g_2(y-u_2) + g_1(u_2)];$$

$$0 \leq u_2 \leq y$$

$$\Phi_{123}(y) = S_3(y) = \max [g_3(y-u_3) + \Phi_{12}(u_3)];$$

$$0 \leq u_3 \leq y$$

$$\Phi_{1234}(y) = S_4(y) = \max [g_4(y-u_4) + \Phi_{123}(u_4)];$$

$$0 \leq u_4 \leq y,$$

каждая из которых представляет собой функциональное уравнение Беллмана, которое в общем случае для k фирм запишется в виде:

$$S_k(y) = \max [g_k(y - u_k) + S_{k-1}(u_k)].$$

$$0 \leq u_k \leq y$$

Для определения оптимальной политики на каждом этапе приходится комбинировать значения из третьего столбца со значением из второго столбца и определять максимальную сумму в каждой таблице. Так, для определения оптимальной политики на третьем этапе при инвестициях $y = 3$ необходимо при прямом переборе сравнить следующие семь политик: (3, 0, 0), (2, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 2, 1), (0, 1, 2), (0, 0, 3), (0, 1, 2). Этот перебор можно сократить, т. е. достаточно вычислить значения двух функций S_2 и g_3 для четырех значений u_3 .

Таблица 6

u_3	$g_3(u_3)$	$S_2(3-u_3)$	$g_3(u_3) + S_2(3-u_3)$
0	0	0,50	0,50
1	0,10	0,35	0,45
2	0,30	0,20	0,50
3	0,55	0	0,55

Из табл. 6 следует, что наилучшей политикой на третьем этапе будет $u_3 = 3$ и $S_2(0)$. С помощью последнего столбца табл. 3 или 4 получим для $S_2(0)$ $u_1 = 0$, $u_2 = 0$. Поэтому окончательно оптимальной политикой на третьем этапе при $y = 3$ будет (0, 0, 3), что и занесено в последний столбец табл. 4.

Таким образом, благодаря принципу оптимальности и функциональному уравнению Беллмана вместо сравнения суммарных доходов восьми вариантов распределения потребовалось сравнение только четырех вариантов (табл. 6).

Для сравнения в табл. 4 и 5 в предпоследних столбцах приведены оптимальные стратегии предыдущих этапов.

Благодаря такому поэтапному перебору существенно сокращается трудоемкость. Если же распределять средства сразу между четырьмя фирмами:

(5, 0, 0, 0), (4, 1, 0, 0), (4, 0, 1, 0), (4, 0, 0, 1), (3, 1, 1, 0), (3, 0, 1, 1), (3, 2, 0, 0), (3, 0, 2, 0), (3, 0, 0, 2), (2, 1, 1, 1), (2, 2, 0, 1), (2, 2, 1, 0), (2, 0, 2, 1) и т. д., то возникает необходимость перебора большого количества вариантов.

С увеличением числа ассигнований и фирм объем перебора интенсивно возрастает. Так, для $k = 4$ при $y = 10$ число вариантов составит 286, при $y > 10$ это число равно 1001. Для k числа фирм процесс оптимального распределения ресурсов распадается на $k - 1$ этапов.

На примере задачи распределения ресурсов продемонстрирована модификация метода динамического программирования для процессов, не развивающихся во времени. Процесс искусственно разворачивается во времени. В этом смысл динамического программирования как оптимального метода перебора, как метода решения комбинаторных задач перебора.

В этой задаче требуется вычислить значения функции Беллмана S_{k-1} на $(k-1)$ -м шаге для всех значений аргумента, так как для решения функционального уравнения на k -м шаге требуется перебрать все допустимые значения этой функции. Соответственно на каждом шаге, как правило, вычисляется полная таблица значений функции Беллмана. Пошаговая процедура вычислений в данной задаче оказалась возможной благодаря зависимости дохода в каждой фирме только от вложения в данную фирму и независимости от вклада в другие фирмы, взятые по отдельности и в сумме. Это свойство обеспечило выполнение принципа оптимальности для дискретных многоступенчатых процессов.

3.5.4. Транспортная задача

Транспортная задача имеет следующую формулировку. Имеются m складов ресурсов и n пунктов потребления (m истоков и n стоков). Для простоты рассмотрим случай с одним ресурсом. Обозначим через a_i запасы ресурсов на i -м складе ($i = 1, 2, \dots, m$), b_j количество ресурсов, ожидаемое в j -м пункте потребления ($j = 1, 2, \dots, n$). Предполагается, что суммарный запас равен суммарному спросу:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (3-37)$$

Задачу можно решать и без этого ограничения, считая, что суммарные запасы превышают суммарные запросы. Однако для простоты дадим решение при условии (3-37). Через x_{ij} обозначим количество ресурсов, перевозимое с i -го склада на j -й пункт потребления. Стоимость такой перевозки определяется функцией $g_{ij}(x_{ij})$, которая может задаваться аналитически, графически или с помощью таблиц. Считается, что нельзя перевозить ресурсы через перевалочные пункты, т. е. справедливы следующие условия:

$$x_{ij} \geq 0; \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j; \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (3-38)$$

В этой задаче требуется определить величины x_{ij} , удовлетворяющие условиям (3-38), при которых суммарная стоимость перевозок будет минимальна, т.е.:

$$I = \sum_{ij} g_{ij}(x_{ij}) = \min.$$

Часто функции стоимости перевозок являются линейными функциями величин x_{ij} :

$$g_{ij}(x_{ij}) = c_{ij} x_{ij}. \quad (3-39)$$

Транспортная задача в общем случае — это задача нелинейного программирования, где в качестве ограничений выступают соотношения (3-38). При условии (3-39) она становится задачей линейного программирования и может быть решена симплекс-методом, рассмотренным в юните 2.

Для простоты ограничимся вариантом с двумя складами $m = 2$ и несколькими пунктами потребления n . Решение задачи для больших значений m сталкивается с большими вычислительными трудностями (известными под названием "проклятие размерности").

Для решения задачи при $m = 2$ прежде всего представим статический процесс перевозки как динамический в виде последовательности этапов. В качестве первого этапа выберем удовлетворение спроса n -го пункта потребления, затем перейдем к $(n - 1)$ -у и т. д. Составим для такого поэтапного процесса функциональное уравнение Беллмана.

Введем функцию $S_k(a_1, a_2)$, $k = 1, 2, \dots, n$ как величину затрат при использовании оптимальной политики, когда начинают с количества a_1 и a_2 ресурсов на складах при потребностях b_j ($j = 1, 2, \dots, n$) в пунктах потребления.

На первом этапе ($k = 1$) удовлетворяются потребности n -го пункта

потребления, при этом получаются затраты:

$$g_{1n}(x_{1n}) + g_{2n}(x_{2n}).$$

Запасы ресурсов на складах уменьшаются соответственно до $a_1 - x_{1n}$ и $a_2 - x_{2n}$, поэтому:

$$S_1(a_1, a_2) = g_{1n}(x_{1n}) + g_{2n}(x_{2n}), \quad (3-40)$$

при условиях, что:

$$x_{1n} + x_{2n} = b_n; \quad 0 \leq x_{1n} \leq a_1; \quad 0 \leq x_{2n} \leq a_2; \quad S_0(a_1, a_2) = 0. \quad (3-41)$$

На втором этапе удовлетворяются потребности n -го и $(n - 1)$ -го пунктов потребления. Для этого используется рекуррентное соотношение Беллмана (функциональное уравнение):

$$S_2(a_1, a_2) = \min_{(x_{12}, x_{22}) \in G_2} [g_{1n-1}(x_{1n-1}) + g_{2n-1}(x_{2n-1}) + S_1(a_1 - x_{1n-1}, a_2 - x_{2n-1})] \quad (3-42)$$

где область G_2 определяется соотношениями:

$$x_{1n-1} + x_{2n-1} = b_{n-1};$$

$$0 \leq x_{12} \leq a_1;$$

$$0 \leq x_{22} \leq a_2.$$

Запись (3-42) означает оптимальное обеспечение (по расходам на перевозки) потребностей $(n - 1)$ -го пункта потребления при том условии, что они удовлетворены для n -го пункта потребления. Выполнение этого условия обеспечивается самим определением функции S , в соответствии с формулами (3-40) и (3-41), в частности, первое из условий (3-41) означает полное удовлетворение спроса n -го пункта потребления; n -й номер можно поменять на первый, изменив нумерацию или определив первый этап как удовлетворение потребностей первого пункта, отчего оптимальность значений не изменится. Последовательность выполнения операций "с конца" характерна для динамического программирования и обусловливается принципом оптимальности.

Из соотношения (3-42), так же как в задаче о распределении ресурсов, следует, что на каждом этапе необходимо иметь значения функции Беллмана для всех значений аргумента, чтобы выбрать из них наилучшее при составлении функционального уравнения для последующего этапа. Последнее соотношение (3-41) вводится для полноты рекуррентного процесса вычислений.

Пошаговый процесс оптимизации оказался возможным благодаря зависимости стоимости перевозки с i -го склада к j -у потребителю только от величины груза, перевозимого между этими пунктами, и ее независимости от величины груза, перевозимого с других складов к этому же j -у потребителю и со всех складов (включая i -й) к другим потребителям. Это обеспечило выполнение принципа оптимальности для данной задачи.

Для любого $1 \leq k$ получаем:

$$S_k(a_1, a_2) := \min_{(x_{1k}, x_{2k}) \in G_k} [g_{1k}(x_{1k}) + g_{2k}(x_{2k}) + S_{k-1}(a_1 - x_{1n-k}, a_2 - x_{2n-k})] \quad (3-43)$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

Минимизация в этой формуле производится по обоим переменным x_{1k}, x_{2k} из области G , которая определяется условиями:

$$x_{1k} + x_{2k} = b_k;$$

$$0 \leq x_{1k} \leq a_1;$$

$$0 \leq x_{2k} \leq a_2;$$

Если заменить

$$a_1 \rightarrow x_1, \quad a_2 \rightarrow x_2,$$

то уравнение (3-43) запишется в стандартном для динамического программирования виде:

$$S_k(x_1, x_2) = \min_{(x_{1k}, x_{2k}) \in G_k} [g_{1k}(x_{1k}) + g_{2k}(x_{2k}) + S_{k-1}(x_1 - x_{1k}, x_2 - x_{2k})] \quad (3-44)$$

где

$$k = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{1k} + x_{2k} = b_k;$$

$$0 \leq x_{1k} \leq a_1;$$

$$0 \leq x_{2k} \leq a_2$$

Уравнение (3-44) аналогично ранее рассмотренным функциональным уравнениям и задаче о распределении ресурсов за исключением двух моментов.

Во-первых, на переменные, по которым ищется экстремум, наложено больше ограничений. Такие задачи трудно решать, т.к. требуется рассматривать множество случаев, когда минимум достигается на границе тех или иных ограничений. Метод динамического программирования практически снимает трудности с введением ограничений, необходимо лишь на каждом этапе проверять пределы допустимой области.

Во-вторых, транспортная задача с двумя складами является двумерной задачей динамического программирования, так как функция Беллмана зависит от двух переменных, тогда как предыдущие задачи (о распределении ресурсов, о критическом пути и т. д.) были одномерными: оптимальным образом распределялся один капитал или выбиралось только время движения (а не время и стоимость).

Задача о распределении ресурсов становится многомерной, если между фирмами необходимо оптимальным образом распределить несколько видов ресурсов: капитал, рабочую силу, технику. Объем вычислений по методу динамического программирования резко увеличивается с возрастанием размерности задачи. Это составляет один из существенных недостатков

динамического программирования, который называют "проклятием размерности".

Двумерную транспортную задачу легко свести к одномерной, если использовать соотношение (3-37), которое для двух складов ($m=2$) запишется в виде:

$$a_1 + a_2 = \sum_{j=1}^n b_j,$$

или в других обозначениях (см. формулу (3-44)):

$$x_1 + x_2 = \sum_{j=1}^n b_j = b.$$

Из последнего уравнения при заданном суммарном спросе всегда величину x_2 можно выразить через x_1 , поэтому:

$$S_k(x_1, x_2) \rightarrow S_k(x_1).$$

Отсюда соотношение (3-42) переписывается в виде:

$$S_k(x_1) = \min_{x_{1k}} [g_{1k}(x_{1k}) + g_{2k}(b - x_{1k}) + S_{k-1}(x_1 - x_{1k})],$$

где величина x_{1k} подчиняется условиям:

$$0 \leq x_1 - x_{1k};$$

$$0 \leq b - x_{1k} \leq \sum_{j=1}^n b_j - x_1;$$

$$0 \leq x_1 \leq \sum_{j=1}^n b_j.$$

Этот прием позволяет общую задачу с m складами свести к задаче с $m - 1$ складом, т. е. m -мерная задача сведется к $(m - 1)$ -мерной, в результате чего ее размерность понизится на единицу.

Рассмотрим числовой пример решения транспортной задачи с помощью динамического программирования для случая с двумя складами и восемью пунктами потребления, т. е. $n = 2$ и $m = 8$. Функцию стоимости возьмем в виде:

$$g_{ij}(x) = c_{ij}(x) + d_{ij}(x) + a_{ij}x + b_{ij}x^2 + z_{ij}.$$

Таким образом, стоимость перевозки из одного пункта в другой представляет собой квадратичную функцию перевозимого количества, где свободный член z_{ij} - зависит от перевозимого количества. Первое слагаемое характеризует организационные расходы и определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} c_{ij}(x) &= 0 && \text{при } x = 0; \\ c_{ij}(x) &= x && \text{при } x > 0. \end{aligned}$$

Второе слагаемое характеризует штраф за недостаточно полное использование транспортной линии и определяется соотношением:

$$\begin{aligned}
 d_{ij}(x) &= d_{ij}(x) > 0 && \text{при } 0 \leq x \leq z_{ij} \leq b_{ij}; \\
 d_{ij}(x) &= 0 && \text{при } x > z_{ij}; \\
 d'_{ij}(x) &= 0 && \text{при } z_{ij} = 0.
 \end{aligned}$$

Соответствующие значения коэффициентов приведены в табл. 7.

Так, стоимость перевозки из первого склада к седьмому потребителю задается формулой

$$g_{17}(x) = 5x + 1$$

Получим оптимальное решение задачи методом динамического программирования при начальных запасах на складах $a_1 = 40$, $a_1 = 50$. Результаты решения сведены в табл. 7.

Таблица 7

Потребитель j	a_{1j}	b_{1j}	c_{1j}	d_{1j}	z_{1j}	a_{2j}	b_{2j}	c_{2j}	d_{2j}	z_{2j}	Спрос b_j
1	2,0	0,00	1,0	0,0	0,0	3,5	0,0	0	0	0,0	5
2	3,0	0,00	0	2	0,4	1,0	0,0	1	0	0,0	10
3	1,5	0,20	0	0	0,0	3,1	0,0	2	0	0,0	20
4	4,0	0,00	1	0	0,0	2,5	0,05	0	2	0,6	5
5	2,5	0,01	0	1	0,2	1,0	0,00	0	2	1,0	15
6	4,5	0,10	2	0	0,0	3,0	0,20	3	0	0,0	10
7	5,0	0,00	0	1	0,4	4,0	0,10	0	0	0,0	20
8	3,0	0,00	0	2	0,8	1,5	0,00	0	0	0,0	5

Полная стоимость перевозок равна $C = 274,6864$. Расчеты производились с помощью программы, написанной на Фортране, с шагом 0,2 изменения переменных управления. Описание алгоритма и блок-схемы приведено ниже.

Таблица 8

Потребитель j	Количество груза перевозимого из 1 склада	Количество груза перевозимого из 2 склада	Расходы	Суммарные расходы
1	5,0	0,0	11	11
2	0,4	9,6	11,8	22,8
3	7,2	12,8	62,848	85,648
4	0,0	5,0	13,75	99,398
5	0,2	14,8	15,3004	114,6984
6	6,4	3,6	51,288	165,9864
7	20,0	0,0	100	265,9864
8	0,8	4,2	8,7	274,68,64

3.5.5. Алгоритм и блок-схема вычислительного процесса для динамического программирования

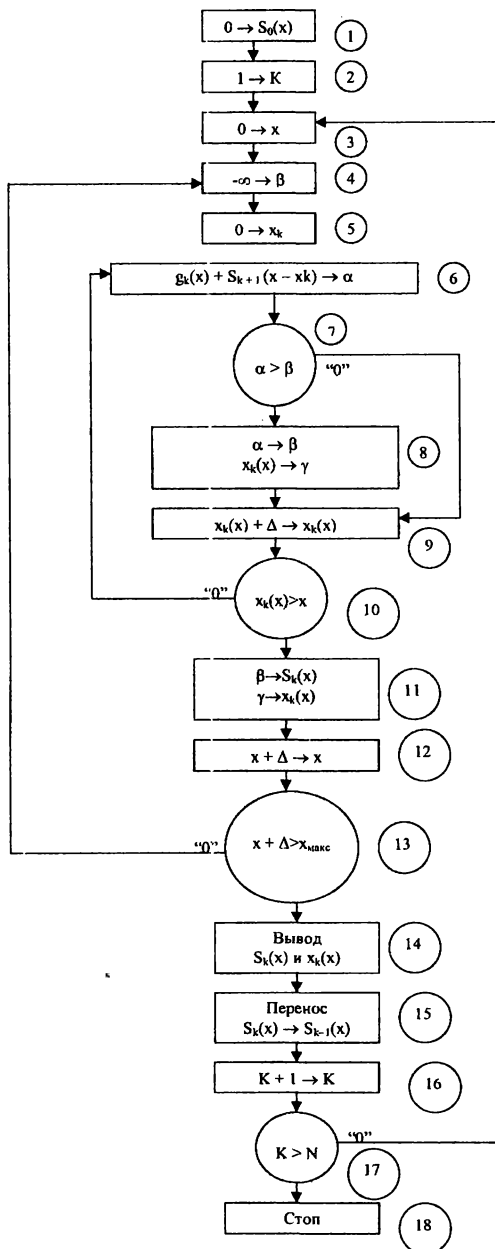


Рис. 23. Блок-схема алгоритма динамического программирования

На рис. 23 представлена блок-схема вычислительного процесса для решения задачи распределения ресурсов методом динамического программирования. Она может служить основой для составления программы любой задачи, решаемой на ЭВМ методом дискретного динамического программирования. Имеются в виду задачи о распределении ресурсов, транспортная и другие, для которых удастся составить модель динамического поэтапного процесса.

Далее даются пояснения к блок-схеме на рис. 23. Основная часть схемы реализует рекуррентное соотношение Беллмана, согласно которому из функции S_{k-1} получается функция S_k . В блок-схеме, особенно вначале, имеются специальные блоки, позволяющие вычислять S_1 в плане общей процедуры в соответствии с уравнением:

$$S_1(x) = \max [g_1(x_k) + S_0(x - x_k)] = g_1(x).$$

Для этого предполагаем, что $S_0(x) = 0$ (блок 1). Индекс k , обозначающий число способов распределения, вначале принимает значение $k = 1$ (блок 2). Блок 3 вычисляет значение $S_1(x) = g_1(x)$ для $x = 0, \Delta, 2\Delta \dots$. Символ β условно означает "лучший доход до сих пор" и предназначается для того, чтобы реализовать операцию максимизации. Процесс максимизации начинают записью в память максимального по модулю отрицательного числа, условно обозначаемого $-\infty$ (блок 4), процесс минимизации - записью максимального по модулю положительного числа, условно обозначаемого $+\infty$. Это условный прием, имеющий целью исключить начало процесса решения, как особый случай. В блоке 5 в блок-схему вводится обозначение (присваивается наименование, код) x_k для оптимального распределения на k -м шаге. На начальном шаге $k = 1$, $x = 0$ и нулевое значение испытывается в качестве начального значения для $x_k = 0$. В блоке 6 вычисляется очередное значение суммы:

$$g_k(x_k) + S_{k-1}(x - x_k),$$

которое обозначается через a и сохраняется в памяти.

Блок 7 сравнивает текущее значение дохода a с "лучшим доходом до сих пор" β : если a больше β , то блок 2 заменяет $a \rightarrow \beta$, новому значению $x_k(x)$ присваивается смысл "наилучшего до сих пор значения ресурса". Через блок 9 осуществляется переход от $x_k(x)$ к $x_k(x) + \Delta$, если a меньше β , замены $a \rightarrow \beta$ не происходит, в памяти сохраняется прежний β , значение a забывается и через блок 9 делается очередная замена $x_k(x) + \Delta \rightarrow x_k(x)$.

Для процесса минимизации знаки неравенств следует поменять на обратные. Если новое значение $x_k(x) + \Delta$ больше общего количества выделяемых ресурсов x (блок 10), то оно не рассматривается, и осуществляется переход к блоку 11; если значение $x_k(x) + \Delta$ допустимо, то оно поступает на блок 6 для повторения процесса.

В блоке 11 происходит запоминание полученных оптимальных значений $x_k(x)$ и $S_k(x)$. В блоке 12 общее число ресурсов увеличивается на шаг: $x + \Delta$ заменяет x . Блок 13 проверяет, не превышает ли новое значение ресурсов их общего предельного значения $x_{\text{макс}}$.

Если значение $x + \Delta$ больше $x_{\text{макс}}$, полученные данные $x_k(x)$ и $S_k(x)$

выдаются на печать (блок 14). Блок 15 предназначен для замены старых массивов $S_{k-1}(x)$ на новые $S_k(x)$, которые будут использоваться в процессе сравнения на следующем шаге с $S_{k+1}(x)$. Блок 16 означает переход от k -го этапа к $(k+1)$ -му этапу, т. е. вместо k процессов рассматриваются $k+1$.

Блок 17 проверяет, исчерпаны ли все возможные количества процессов N . Если ответ отрицательный, то с блока 3 начинается процесс вычислений с увеличенным на единицу k . Если $(k+1) > N$, процесс заканчивается (блок 18) и на печать выдается результат с выхода блока 14.

3.5.6. Задачи планирования

Большинство задач оптимизации делится на две группы: распределения и расписания. В задачах первой группы (распределения ресурсов, транспортной) время, как правило, отсутствует. В задачах второй группы, которые часто возникают в автоматизированных системах управления, требуется ресурсы распределить по времени. Встречаются и смешанные задачи распределения и расписания, в которых требуется одновременно оптимальным образом распределить ресурсы по объектам и расписать это распределение по времени. Рассмотрим модель задачи планирования во времени, часто называемую задачей расписания, под которой понимается оптимальное распределение ресурсов во времени. В качестве ресурсов могут выступать финансы, топливо, энергия, работа, приборы, транспортные средства.

Считается, что ресурсы могут распределяться только дискретно с определенной длиной шага. Допустим, что весь временной интервал планирования t_n разделен на N одинаковых интервалов времени. На планирование выделено определенное количество ресурсов x и задана величина доходов (или расходов) $g_i(x_i)$ на каждом интервале от вложения на нем x_i ресурсов; при этом, чтобы был справедлив принцип оптимальности, считаем, что доход на i -м интервале зависит только от количества ресурсов, выделенных на этом интервале, и не зависит от ресурсов, выделенных на предыдущих $i-1, i-2$ и т. д. интервалах. Требуется оптимально распределить ресурсы x на всем интервале, чтобы суммарный доход был максимален (или расход минимален):

$$f(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N g_i(x_i) = \max.$$

Для построения динамического процесса планирования считаем, что ресурсы вкладываются все на одном интервале, потом - все на двух и т. д. Тогда получаем рекуррентный процесс, аналогичный полученному в задаче распределения по фирмам. Общее рекуррентное соотношение Беллмана будет иметь вид:

$$S_n(x) = \max_{x_n} [g_n(x_n) + S_{n-1}(x - x_n)],$$

где $n = 2, 3, 4, \dots, N$, причем

$$S_1(x) = \max_i g_1(x),$$

$$S_0(x) = 0.$$

Теперь разберем усложненные варианты рассмотренной задачи.

1. Допустим, что один и тот же вид ресурсов вкладывается на каждом

интервале в M фирм, причем в самом общем случае число M зависит от интервала планирования n , т. е. $M = f(n)$. Для простейшего варианта можно считать, что доход на каждом интервале от вложения в m -ю фирму зависит только от количества вложенных ресурсов x_n^m и равен $g(x_n^m)$, $n = 1, 2, \dots, N$; $m = 1, 2, \dots, M$. В этом случае общий доход:

$$I(x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^M, \dots, x_N^1, x_N^2, \dots, x_N^M) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M g_n^m(x_n^m) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N g_n^m(x_n^m)$$

при

$$\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N x_n^m = x.$$

Необходимо, чтобы I достигло максимума. Такая задача решается методом динамического программирования, но вначале необходимо решить классическую задачу распределения ресурсов по фирмам для одного, потом для двух интервалов времени. Или, наоборот, вначале распределить ресурсы для одной фирмы и всех интервалов времени, потом для двух и для всех интервалов и т.д.

Здесь уже имеет место смешанная задача распределения (назначения, прикрепления) и расписания. Однако благодаря линейности она сводится к классической задаче о распределении ресурсов в NM фирм и решается динамическим программированием.

2. Допустим, имеется L разных дискретных ресурсов. Если сохраняется принцип независимости их друг от друга, то принцип оптимальности справедлив и можно решать задачу аналогично предыдущему. Вначале распределить L ресурсов между M фирмами для одного интервала времени, потом для двух, трех и т. д. Функция цели будет иметь вид:

$$I(x_n^{mj}) = \sum_{j=1}^L \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N g_n^{mj}(x_n^{mj}).$$

Дальнейшее обобщение задачи заключается в соблюдении заданной последовательности работ, которые в данной модели совпадают с фирмами, а ресурсы включают в себя и рабочую силу. Такая последовательность часто задается в виде сетевого графика и аналитически записывается в виде ограничений.

Если еще ввести понятие рабочего места и условие "привязки" работы к рабочему месту, то получится задача календарного планирования.

3.6. Формальный математический аппарат и эффективность динамического программирования

Ранее общий математический аппарат динамического программирования рассматривался на отдельных частных примерах, здесь будет приведено его формальное описание.

Функциональное уравнение Беллмана в дискретном случае, так же как и в непрерывном случае, справедливо при выполнении принципа оптимальности,

который аналогичен принципу оптимальности в непрерывном случае, но имеет свои особенности.

Предположим, что при распределении x средств между N фирмами доход выражается функцией вида:

$$I(x_1, x_2, \dots, x_N) = g_1(x_1) + g_2(x_2) + \dots + g_N(x_N). \quad (3-45)$$

Такие нелинейные функции носят название сепарабельных. Они типичны для динамического программирования. Для таких функций можно построить динамический процесс, для которого заведомо справедлив принцип оптимальности Беллмана, аналогично тому, как это было сделано в задаче о распределении ресурсов.

Будем считать, что ресурсы x_i имеют общую меру и удовлетворяют условию:

$$\sum_{i=1}^N x_i = x, \quad x \geq 0.$$

Требуется найти:

$$S(x) = \max I(x_1, x_2, \dots, x_N).$$

Функция (3-45) обладает свойством аддитивности доходов по всем фирмам. Оно обеспечивает выполнение принципа оптимальности Беллмана, который **для дискретных процессов управления** может быть сформулирован следующим образом: *последующие решения должны составлять оптимальное поведение относительно предыдущего состояния, полученного в результате решения на предыдущем этапе, независимо от того, какими бы эти состояние и решение ни были.*

Дискретное динамическое программирование применимо только к таким многошаговым процессам управления. Для функции (3-45) этот принцип заведомо выполнен, так как доход от вложения ресурсов в данную фирму зависит только от количества ресурсов, вложенных в эту фирму, и не зависит от количества ресурсов, вложенных в другие. Именно это обстоятельство позволяет построить многошаговый процесс типа "первый шаг - вклад в первую фирму, второй шаг - вклад в первые две фирмы и т. д.", для которого справедлив принцип оптимальности. Иначе смысл принципа оптимальности можно сформулировать так: *многошаговый процесс удовлетворяет принципу оптимальности Беллмана, если функция цели, принимающая на k -м шаге оптимальное значение при $x = x^k$, принимает также оптимальное значение для оставшихся $k - 1$ шагов при том же $x = x^k$.* Если функция суммарного дохода является несепарабельной, то неясно как построить многошаговый процесс, для которого удовлетворяется принцип оптимальности.

Если имеется несколько видов ресурсов, которые не имеют общей меры, то она становится многомерной. Например, в случае с двумя ресурсами суммарный доход равен:

$$I_N(x_1, x_2, \dots, x_N; y_1, y_2, \dots, y_N) = \sum_{i=1}^N g_i(x_i, y_i),$$

где

$$\sum_{i=1}^N x_i = x, \quad x \geq 0;$$

$$\sum_{i=1}^N y_i = y, \quad y \geq 0.$$

Функция Беллмана определяется как:

$$S_N(x, y) = \max I_N(x_1, x_2, \dots, x_N; y_1, y_2, \dots, y_N),$$

причем для $N = 1$

$$S_1(x, y) = g_1(x, y),$$

для $N \geq 2$

$$S_N(x, y) = \max_{x \geq x_N \geq 0} \max_{y \geq y_N \geq 0} [g_N(x_N, y_N) + S_{N-1}(x - x_N, y - y_N)].$$

Такой вид имеет функциональное уравнение Беллмана для двумерного случая.

Оценим объем направленного перебора при динамическом программировании и сравним его с прямым перебором. В общей одномерной задаче распределения ресурсов для n фирм при прямом переборе число вариантов:

$$T = m^n,$$

где m - число дискретных значений, которые могут принимать x_i , n - число переменных (фирм). Если $n = 2$, $m = 3$, т.е.:

$$x_1(a_1, a_2, a_3), \quad x_2(b_1, b_2, b_3),$$

то возможных комбинаций, которые необходимо проверить при прямом переборе, будет $a_1 b_1, a_1 b_2, \dots, a_2 b_1, \dots, a_3 b_3$, всего $9 = 3^2$.

Точную формулу для числа перебираемых вариантов при динамическом программировании написать не удается, так как в каждой задаче она своя. Однако можно утверждать, что зависимость числа вариантов от n не экспоненциальная, а примерно линейная.

Для ориентации рассмотрим задачу нелинейного целочисленного программирования в виде:

$$F = \sum_{j=1}^n g_j(x_j) = \max,$$

причем

$$b \geq \sum_{j=1}^n a_j x_j; \quad a_j > 0; \quad x_j \geq 0 \quad (x_j \text{ - целые числа}), j = 1, \dots, n.$$

Для простоты положим $a_j = 1$. При определении максимума F необходимо вычислить значения $f_j(x_j)$ для каждого из $b + 1$ значений, которые может принимать x_j . Найдем нижнюю границу числа набора целых значений x_j , удовлетворяющих условию

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j = b;$$

т.е. вместо неравенства рассмотрим строгое равенство. Для случая прямого перебора искомое количество равно числу способов, которыми можно разместить, например, 6 одинаковых шаров в n урн. Это число равно числу сочетаний из $n + b - 1$ по b , т. е.

$$C_{n+b-1} = [(n+b-1)!] / [b!(n-1)!].$$

Для $n = 5$ и $b = 20$ получим 10626. Это означает, что при прямом переборе необходимо вычислить значения F для 10626 различных комбинаций значений x_j .

Теперь оценим объем вычислений при направленном переборе в случае динамического программирования. Для определения значений функции Беллмана $S_k(x)$ при заданном x необходимо выполнить $x + 1$ вычисление. Чтобы построить всю таблицу значений функции необходимо осуществить вычисления в количестве

$$\sum_{x=0}^b (x+1) = b+1 + b(b+1)/2,$$

откуда для подсчета всех необходимых значений $k-1$ функций $S_k(x)$ потребуется $(k-1) [b+1 + b(b+1)/2]$ вычислений. Для последней функции S_k требуется найти ее значение $S_k(b)$. Поэтому здесь необходимо вычислить только $b+1$ значение. Таким образом, общее число вычислений при динамическом программировании определяется формулой

$$b[n + (n-1)(b+1)/2] + n,$$

которое при $n = 5$ и $b = 20$ равно 945, что составляет примерно 10% от объема 10626 вычислений при прямом переборе.

При решении непрерывных задач отыскания экстремума с помощью динамического программирования встает еще проблема интерполяции промежуточных значений функции S_{n-1} для подсчета значений S_n в соответствии с функциональным уравнением Беллмана

$$S_n(x) = \max_{x \geq x_n \geq 0} [g_n(x_n) + S_{n-1}(x - x_n)].$$

Дело в том, что заготовленная на $(n-1)$ -м шаге таблица дискретных значений

функции S_{n-1} может не содержать необходимого значения аргумента, при которого функция S_n принимает максимальное значение, так как x и все остальные переменные меняются непрерывно. В этом случае приходится по линейному или другому закону интерполировать промежуточные между двумя табличными значения S_{n-1} .

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. *Составьте логическую схему базы знаний по теме юниты.*

2. Начертите графики функций, которые входят в класс функций, используемый в классическом вариационном исчислении, и приведите их названия.

3. Начертите графики функций, которые используются в оптимизации дискретных процессов управления.

4. Напишите задание функционала в виде двух множеств; одно из которых – множество тригонометрических функций.

5. Рассчитайте эффективность направленного перебора вариантов в случае динамического программирования по сравнению с прямым перебором, для $n = 7$ и $b = 30$.

ТРЕНИНГ УМЕНИЙ

1. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №1

Задание

Найти экстремали заданного функционала.

Задан функционал $I(y(x)) = \int_0^1 (x \sin y + \cos y) dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = \frac{\pi}{4}$.

Решение

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из данной ситуации.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	Определить подинтегральную функцию	1. Подинтегральная функция $F = x \sin y + \cos y$.
2	Составить уравнение Эйлера	2. $\frac{\partial F}{\partial y} = x \cos y - \sin y$, откуда уравнение Эйлера: $x \cos y - \sin y = 0$.
3	Определить экстремали как решения уравнения Эйлера	$x \cos y - \sin y = 0$, 3. $x = \frac{\sin y}{\cos y} = \operatorname{tg} y$; $y = \operatorname{arctg} x$.
4	Проверить удовлетворение решения начальным условиям	4. $y = \operatorname{arctg} 0 = 0$, при $x=0$ $y = \operatorname{arctg} \frac{\pi}{4} = 1$, при $x = \frac{\pi}{4}$. Условия удовлетворены, следовательно, $y = \operatorname{arctg} x$ является экстремалью заданного функционала.

Решите самостоятельно следующие задания:

Задание 1.1

Найти экстремаль функционала:

$$I(y) = \int_0^1 y^{12} dx; \quad y(0) = 0, y(1) = 1.$$

Задание 1.2

Найти экстремаль функционала:

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + 1) dx; \quad y(x_0) = y(x_1) = 0.$$

Задание 1.3

Найти экстремаль функционала:

$$I(y) = \int_4^8 (x - 4y)^2 dx; \quad y(4) = 1, \quad y(8) = 2.$$

2. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №2.

Задание

Используя достаточные условия экстремума (условия Лежандра), исследовать на экстремум следующий функционал:

$$I(y(x)) = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx; \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = y.$$

Решение

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из данной ситуации.

№ г/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	Составить уравнение Эйлера	1. Подинтегральная функция $F = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}},$ откуда уравнение Эйлера: $\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y}(1+y'^2)} = C_1, \text{ где } C_1 - \text{const.}$
2	Определить экстремали как решения уравнения Эйлера	2. Из уравнения Эйлера получаем простыми преобразованиями: $\frac{1}{\sqrt{y}} \left(\frac{1+y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} \right) = C_1; \quad \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1 \sqrt{y};$ откуда $\dot{y} = \frac{1}{C_1^2(1+y'^2)}$. Это и есть уравнение экстремали.
3	На основании условий Лежандра определить тип максимума (минимума) данного функционала	3. $F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{y} \cdot \sqrt{1+y'^2}}; F_{yy'} = \frac{1}{\sqrt{y} \sqrt{(1+y'^2)^3}} > 0$ при любых y' . Согласно условиям Лежандра – это означает реализацию сильного минимума.

Решите самостоятельно следующие задания:

Задание 2.1

Используя условия Лежандра исследуйте на экстремум следующий функционал:

$$I(y) = \int_0^2 y^{12} dx; \quad y(0) = 0, \quad y(2) = 3.$$

Задание 2.2

Используя условия Лежандра исследуйте на экстремум следующий функционал:

$$I(y) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (4y^2 - y^{12} + 8y) dx; \quad y(0) = -1, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Задание 2.3

Используя условия Лежандра исследуйте на экстремум следующий функционал:

$$I(y) = \int_1^2 (x^2 y^{12} + 12y^2) dx; \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 8.$$

3. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №3.

Задание

Оцените эффективность направленного перебора в динамическом программировании по сравнению с прямым перебором на задаче распределения ресурсов, где n – число получателей ресурсов и b – количество видов ресурсов. Заданы: $n = 5$ и $b = 20$.

Решение

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из данной ситуации.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	Определить количество вычислений для различных комбинаций значений ресурсов при прямом переборе	1. Искомое количество вычисляется по формуле: $C_{n+b-1}^8 = \frac{(n+b-1)!}{b!(n-1)!} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 10626$ (вычислений).
2	Определить количество вычислений для различных комбинаций значений ресурсов при направленном переборе (в динамическом программировании)	2. Искомое количество вычисляется по формуле: $b \left[n + \frac{(n-1) \cdot (b+1)}{2} \right] + n = 20 \left[5 + \frac{4 \cdot 21}{2} \right] + 5 = 945$ (вычислений).
3	Определить эффективность направленного перебора по сравнению с прямым в %	3. Вычисляем эффективность: $\mathcal{Э}_{д.п.} = \frac{945 \cdot 100}{10626} \approx 9\%.$ Т.е. объем вычислений в динамическом программировании составляет около 9% от объема вычислений при прямом переборе.

Решите самостоятельно следующие задания:

Задание 3.1

Оцените эффективность направленного перебора в динамическом программировании по сравнению с прямым перебором, если число получателей ресурсов $n = 6$, а количество видов ресурсов $b = 25$.

Задание 3.2

Оцените эффективность направленного перебора в динамическом программировании по сравнению с прямым перебором, если число получателей ресурсов $n = 8$, а количество видов ресурсов $b = 20$.

Задание 3.3

Оцените эффективность направленного перебора в динамическом программировании по сравнению с прямым перебором, если число получателей ресурсов $n = 10$, а количество видов ресурсов $b = 25$.
